

23. A Função Gama

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

A fim de reescrever adequadamente as soluções que obtivemos para a equação de Bessel, precisamos da mais importante das *funções altamente transcendent* da Matemática, a *função Gama*. Para tanto, comecemos revisando alguns fatos acerca de integrais impróprias.

Lembre-se de que se $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ (possivelmente $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) é integrável em todo intervalo $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, então f é integrável em (a, b) se, para algum $c \in (a, b)$, existem os limites

$$\lim_{\beta \rightarrow b-} \int_c^\beta f(t)dt \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_\alpha^c f(t)dt.$$

Nesse caso, definimos a **integral imprópria** de f sobre (a, b) por

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\alpha \rightarrow a+} \int_\alpha^c f(t)dt + \lim_{\beta \rightarrow b-} \int_c^\beta f(t)dt,$$

e não é possível provar que o segundo membro independe do $c \in (a, b)$ fixado.

O critério mais efetivo para garantir a existência de integrais impróprias é o resultado a seguir, conhecido como o **teste**

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

da **comparação** para integrais impróprias. Sua demonstração pode ser encontrada nas referências.

Teorema 1. *Sejam dadas funções $f, g : [c, b) \rightarrow \mathbb{R}$, integráveis em todo intervalo $[c, \beta] \subset [c, b)$. Se a integral imprópria $\int_c^b g(t)dt$ existe e, para algum $C > 0$, tem-se $|f(t)| \leq Cg(t)$ para todo $t \in [c, b)$, então:*

(a) *As integrais impróprias $\int_c^b f(t)dt$ e $\int_c^b |f(t)|dt$ também existem.*

(b) *Valem as desigualdades*

$$\left| \int_c^b f(t)dt \right| \leq \int_c^b |f(t)|dt \leq C \int_c^b g(t)dt.$$

Um resultado análogo ao teorema acima (também conhecido como *teste de comparação*) vale para funções $f, g : (a, c] \rightarrow \mathbb{R}$. Sugerimos ao leitor parar por um momento para escrever o enunciado correspondente.

De posse dos preliminares acima, definimos a **função Gama** $\Gamma : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ pondo

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

(Recorde que $t^{x-1} = e^{(x-1)\log t}$.)

Fixado $x > 0$, a fim de verificar que $\Gamma(x)$ está *bem definido*, mostraremos que existem as integrais impróprias

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Para tanto, observe que:

(i) Sendo $f, g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ e $g(t) = t^{x-1}$, temos $|f(t)| = f(t) \leq g(t)$ para todo $t \in (0, 1]$. Também, a integral imprópria de g em $(0, 1]$ existe, uma vez que, para $0 < \alpha < 1$, temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 t^{x-1} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left. \frac{t^x}{x} \right|_{t=\alpha}^{t=1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{1 - \alpha^x}{x} = \frac{1}{x}.$$

Portanto, o teste da comparação garante a existência da integral imprópria de f em $(0, 1]$.

(ii) Existe $C > 0$ tal que $e^{-t}t^{x-1} \leq Ce^{-t/2}$, para todo $t \in [1, +\infty)$. De fato, uma vez que a função $t \mapsto \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}}$ é contínua em $[1, +\infty)$ e satisfaz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0,$$

existe $C > 0$ tal que $\frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} \leq C$ para todo $t \in [1, +\infty)$. Então,

$$e^{-t}t^{x-1} = \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} e^{-t/2} \leq Ce^{-t/2},$$

para todo $t \in [1, +\infty)$.

Agora, sendo $f, g : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$ e $g(t) = e^{-t/2}$, as estimativas acima garantem que $|f(t)| \leq Cg(t)$ para todo $t \in [1, +\infty)$. Por outro lado, a integral imprópria de g em $[1, +\infty)$ existe, uma vez que

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} e^{-t/2} dt = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left. -2e^{-t/2} \right|_{t=1}^{t=\beta} = \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{e^{\frac{\beta}{2}}} \right) = \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Portanto, invocando novamente o teste da comparação, concluímos pela existência da integral imprópria de f em $[1, +\infty)$.

Por fim, a discussão acima garantiu a existência das integrais $\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dx$ e $\int_1^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dx$, de sorte que também existe $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dx$.

O resultado a seguir traz uma propriedade muito importante da função Gama.

Proposição 2. *Para $x > 0$, temos $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.*

Prova. Integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}\Gamma(x + 1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt = \int_0^1 e^{-t} t^x dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 e^{-t} t^x dt + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} e^{-t} t^x dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left(-e^{-t} t^x \Big|_{t=\alpha}^{t=1} + x \int_{\alpha}^1 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &\quad + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-e^{-t} t^x \Big|_{t=1}^{t=\beta} + x \int_1^{\beta} e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \left(-\frac{1}{e} + \frac{\alpha^x}{e^{\alpha}} + x \int_{\alpha}^1 e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &\quad + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\beta^x}{e^{\beta}} + \frac{1}{e} + x \int_1^{\beta} e^{-t} t^{x-1} dt \right) \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \frac{\alpha^x}{e^{\alpha}} - \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\beta^x}{e^{\beta}} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x).\end{aligned}$$

□

Para nossos propósitos, a proposição anterior tem pelo menos duas consequências importantes, colecionadas nos dois corolários a seguir.

Corolário 3. *A função Γ estende o fatorial aos reais positivos.*

Prova. Note inicialmente que

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{\alpha \rightarrow 0+} \int_{\alpha}^1 e^{-t} dt + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_1^{\beta} e^{-t} dt \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (-e^{-t}) \Big|_{t=\alpha}^{t=1} + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (-e^{-t}) \Big|_{t=1}^{t=\beta} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+} (-e^{-1} + e^{-\alpha}) + \lim_{\beta \rightarrow +\infty} (-e^{-\beta} + e^{-1}) = 1.\end{aligned}$$

Então, aplicando várias vezes a proposição anterior, obtemos $\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 6$ e, em geral,

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Corolário 4. *A função Γ pode ser estendida a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$ de uma forma tal que a relação $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ permaneça válida.*

Prova. Se $-1 < x < 0$, então $0 < x+1 < 1$, de forma que podemos definir $\Gamma(x)$ pondo

$$\Gamma(x) := \frac{\Gamma(x+1)}{x}. \quad (1)$$

Agora, estendemos Γ ao intervalo $(-2, -1)$ observando que, para $-2 < x < -1$, temos $-1 < x+1 < 0$, de sorte que podemos usar a mesma estratégia anterior, definindo $\Gamma(x)$ por meio de (1). Prosseguindo dessa forma, estendemos Γ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. □

É possível mostrar que a função Gama é C^∞ em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Para um esboço de seu gráfico, veja a figura 60, à página 412 do livro-texto.

Para o próximo resultado, precisamos da seguinte versão do teorema de mudança de variáveis para integrais impróprias.

Lema 5. *Sejam $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [b, +\infty) \rightarrow [a, +\infty)$ uma função derivável, com derivada integrável em cada intervalo fechado contido em $[b, +\infty)$ e tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Então, $\int_{g(b)}^{+\infty} f(t) dt$ converge se, e só se $\int_b^{+\infty} f(g(s))g'(s) ds$ converge. Ademais, sendo esse o caso, tem-se*

$$\int_{g(b)}^{+\infty} f(t) dt = \int_b^{+\infty} f(g(s))g'(s) ds.$$

Prova. Fixado $x > b$, a versão usual do teorema de mudança de variáveis garante a existência de $\int_{g(b)}^{g(x)} f(t) dt$, com

$$\int_{g(b)}^{g(x)} f(t) dt = \int_b^x f(g(s))g'(s) ds.$$

Agora, utilizando o fato de que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, temos

$$\begin{aligned} \int_{g(b)}^{+\infty} f(t) dt &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{g(b)}^y f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{g(b)}^{g(x)} f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_b^x f(g(s))g'(s) ds \\ &= \int_b^{+\infty} f(g(s))g'(s) ds \end{aligned}$$

□

A demonstração do teorema a seguir também necessita de alguns fatos sobre integrais múltiplas. O leitor sem tais pré-requisitos pode omiti-la numa primeira leitura.

Teorema 6. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Prova. Por definição, temos

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{1/2-1} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Sendo $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ a função dada por¹ $g(s) = s^2$, temos g que satisfaz as hipóteses do lema, de sorte que a substituição de variável $t = s^2$ dá ($dt = 2s ds$, logo)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} (s^2)^{-1/2} 2s ds = 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds.$$

Fazendo $I = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$, as propriedades da integral e o teorema de Fubini garantem que

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy \\ &= \iint_{(0,+\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy. \end{aligned}$$

Agora, a mudança de variáveis $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ aplica a faixa $\mathcal{F} = (0, +\infty) \times (0, \frac{\pi}{2})$ do plano $r\theta$ diferenciavelmente sobre o primeiro quadrante do plano xy , com determinante jacobiano

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r}(r \cos \theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r \cos \theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r \sin \theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin \theta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

¹Na tentativa de calcular a integral que define $\Gamma(\frac{1}{2})$, é natural procurar uma mudança de variável da forma $t = s^u$ que a simplifique. Assim fazendo, e uma vez que $dt = us^{u-1}ds$, vemos que o integrando muda para $e^{-s^u} (s^u)^{-1/2} us^{u-1} ds = ue^{-s^u} s^{-u/2+u-1} ds$; portanto, escolhendo u de forma que $-u/2 + u - 1 = 0$ (isto é, $u = 2$), simplificamos a integral para $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$.

Portanto, um argumento de limite similar àquele da demonstração do lema anterior, juntamente com a fórmula de mudança de variáveis em integrais duplas e novamente o teorema de Fubini, nos permitem calcular

$$\begin{aligned} I^2 &= \iint_{(0,+\infty)^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \iint_{\mathcal{F}} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \left(-\frac{e^{-r^2}}{2} \right) \Bigg|_{r \rightarrow 0+}^{r \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2I = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.$$

□

Estudo & Problemas

1. Leia a parte da seção 46 do livro-texto relativa à função Gama. Em seguida, faça o problema 4.

Referências

- [1] T. Apostol. *Calculus, Volume I*, segunda edição. John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1967.
- [2] A. Caminha. *Fundamentos de Cálculo*, segunda edição. SBM, Rio de Janeiro, 2021.