

24. Mais Sobre Funções de Bessel

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

Voltando à discussão das soluções da equação de Bessel de ordem $p \geq 0$,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (1)$$

obtivemos a solução

$$y_p(x) = |x|^p \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1+p)(2+p) \dots (n+p)} \right), \quad (2)$$

definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \Gamma(n+1+p) &= (n+p)\Gamma(n+p) \\ &= (n+p)(n+p-1)\Gamma(n+p-1) \\ &= \dots \\ &= (n+p)(n-1+p) \dots (1+p)\Gamma(1+p). \end{aligned}$$

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

Portanto, para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned} y_p(x) &= x^p \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \Gamma(1+p)}{2^{2n} n! \Gamma(n+1+p)} x^{2n} \right) \\ &= 2^p \Gamma(1+p) \left(\frac{x}{2} \right)^p \left(\frac{1}{\Gamma(1+p)} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \right) \\ &= 2^p \Gamma(1+p) \left(\frac{x}{2} \right)^p \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}. \end{aligned}$$

Pondo, para $x > 0$,

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2} \right)^p \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}, \quad (3)$$

temos

$$y_p = 2^p \Gamma(1+p) J_p,$$

de forma que J_p também resolve a equação de Bessel de ordem p em $(0, +\infty)$. Dizemos que J_p é a **função de Bessel de primeiro tipo e ordem p** . A Figura 1 mostra os gráficos de J_p para $0 \leq p \leq 5$ inteiro.

Se $p \notin \mathbb{Z}_+$, vimos que a equação de Bessel de ordem p também tem a solução

$$y_{-p}(x) = |x|^{-p} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n! (1-p)(2-p) \dots (n-p)} \right),$$

também definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

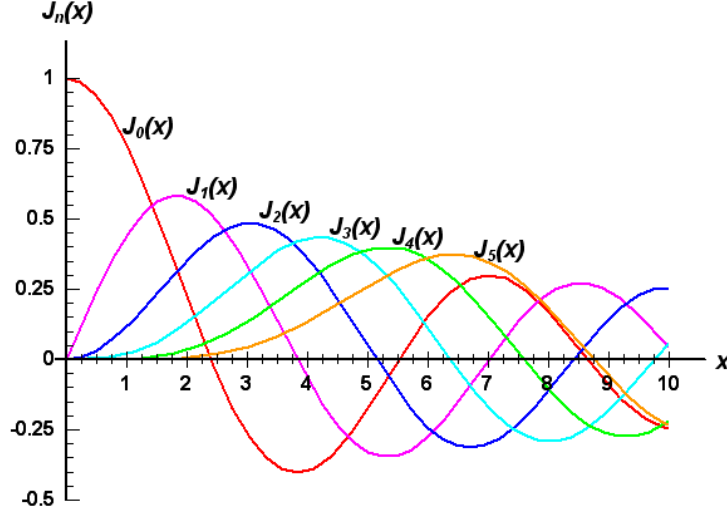


Figura 1: gráfico de J_p para $0 \leq p \leq 5$ inteiro.

Argumentando como acima, temos para $x > 0$ que

$$\begin{aligned}
 y_{-p}(x) &= x^{-p} \left(1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \Gamma(1-p)}{2^{2n} n! \Gamma(n+1-p)} x^{2n} \right) \\
 &= 2^{-p} \Gamma(1-p) \left(\frac{x}{2} \right)^{-p} \left(\frac{1}{\Gamma(1-p)} + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1-p)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \right) \\
 &= 2^{-p} \Gamma(1-p) \left(\frac{x}{2} \right)^{-p} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n+1-p)} \left(\frac{x}{2} \right)^{2n}.
 \end{aligned}$$

Então, denotando por J_{-p} a função obtida trocando p por $-p$ em (3), temos para $x > 0$ que

$$y_{-p} = 2^{-p} \Gamma(1-p) J_{-p},$$

de sorte que J_{-p} resolve a equação de Bessel de ordem p em $(0, +\infty)$.

Também mostramos que, se $p \notin \mathbb{Z}_+$, então y_p e y_{-p} são LI. Logo, J_p e J_{-p} também são LI nesse caso. Dessa forma, a teoria geral das soluções de EDOs lineares de segunda ordem nos dá o seguinte

Teorema 1. *Se $p \notin \mathbb{Z}_+$, então as soluções da equação de Bessel de ordem p em $(0, +\infty)$ são as funções da forma $aJ_p + bJ_{-p}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.*

Em relação à equação de Bessel de ordem $p \in \mathbb{Z}_+$,

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0, \quad (4)$$

já obtivemos como solução a função de Bessel de primeiro tipo e ordem p , isto é (de acordo com (3)), a função $J_p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \quad (5)$$

No restante desta aula, mostraremos que (4) tem uma segunda solução $Y_p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, LI com J_p e da forma

$$Y_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n \geq 0} C_n x^n, \quad (6)$$

com $C_0 < 0$ (veremos em (9) que $C_0 = -\frac{(p-1)!}{2^{p+1}}$ se $p \geq 1$).

Uma vez feito isso, diremos que $Y_p : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ é a **função de Bessel de segundo tipo e ordem p** (recorde que, aqui, $p \in \mathbb{Z}_+$). Os gráficos das funções Y_p , para $0 \leq p \leq 5$, podem ser vistos na Figura 2.

Observe que as raízes da equação indicial associada à equação de Bessel de ordem p são $p_1 = p$ e $p_2 = -p$, com $p_1 - p_2 = 2p \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, o item (b) do Teorema de Frobenius garante que a solução Y_p da equação de Bessel de ordem p tem exatamente a estrutura (6).

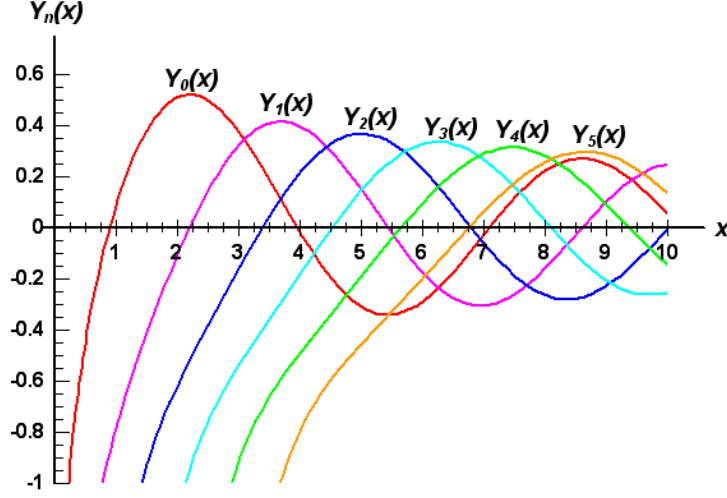


Figura 2: gráfico de Y_p para $0 \leq p \leq 5$ inteiro.

Lema 2. Para $p \in \mathbb{Z}_+$, as funções J_p e Y_p são LI.

Prova. Se $p > 0$, segue de (5) que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} J_p(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^p}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{\rightarrow 1/p!} = 0$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} Y_p(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)^p \log x}_{\rightarrow 0} \underbrace{\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}_{\rightarrow 1/p!} \\ &\quad + \lim_{x \rightarrow 0+} x^{-p} \underbrace{\sum_{n \geq 0} C_n x^n}_{\rightarrow C_0 < 0} = -\infty; \end{aligned}$$

Para $p = 0$, verifica-se, também com o auxílio de (5), que

$$\lim_{x \rightarrow 0+} J_0(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0+} Y_0(x) = -\infty.$$

Agora, se $a, b \in \mathbb{R}^*$ são tais que $aJ_p + bY_p = 0$ em $(0, +\infty)$, então

$$a \lim_{x \rightarrow 0+} J_p(x) + b \lim_{x \rightarrow 0+} Y_p(x) = 0,$$

o que não é o caso. Portanto, J_p e Y_p são LI. $\square$

O lema anterior, juntamente com a teoria geral das soluções de EDOs lineares de segunda ordem, dá o

Teorema 3. *Se $p \in \mathbb{Z}_+$, então as soluções da equação de Bessel de ordem p em $(0, +\infty)$ são as funções da forma $aJ_p + bY_p$, com $a, b \in \mathbb{R}$.*

Para entender como Y_p aparece, começamos recordando a Proposição 5 da aula “*Alguns Fatos Sobre a Solução Geral de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$* ”.

Lema 4. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma solução de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ que não se anula em I . Se*

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx},$$

então y_2 também é solução da EDO em I .

A fim de aplicar o lema à equação de Bessel de ordem¹ $p \in \mathbb{Z}_+$, observemos inicialmente que, pela continuidade das funções definidas por séries de potências, temos

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 1.$$

¹Os usos da letra p para denotar tanto a função-coeficiente em $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ quanto a ordem de uma equação de Bessel são padrão, e não tendem a causar confusão, pois o contexto sempre deixará claro a que objeto “ p ” se refere.

Portanto, (5) garante que podemos tomar $x_0 > 0$ tal que J_p não se anula² no intervalo $(0, x_0)$.

Reescrevamos (4) como

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{x^2 - p^2}{x^2} y = 0.$$

Nas notações do enunciado do lema anterior, temos $y_1 = J_p$ e $p(x) = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$e^{-\int p(x)dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}.$$

Portanto, outra solução y de (4) no intervalo $(0, x_0)$ é a função

$$y(x) = J_p(x) \int_c^x \frac{1}{t J_p(t)^2} dt, \quad (7)$$

para um certo $c \in (0, x_0)$ fixado.

Agora, observe que a função $f : (-x_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

é par, vale 1 em 0 e não se anula no intervalo $(0, x_0)$. Portanto, f não se anula no intervalo $(-x_0, x_0)$, e é possível provar³ que $\frac{1}{f} : (-x_0, x_0) \rightarrow \mathbb{R}$ também é dada por uma série de potências; então, da mesma forma, $\frac{1}{f^2}$ também é dada por uma série de potências em $(-x_0, x_0)$.

Como $J_p(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^p f(x)$, temos

$$\frac{1}{J_p(x)^2} = \frac{2^{2p}}{x^{2p}} \cdot \frac{1}{f(x)^2} = \frac{1}{x^{2p}} \cdot F_p(x)$$

²Já sabemos que os zeros de uma solução não trivial $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ da EDO $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ não se acumulam em I . Contudo, não podemos utilizar esse resultado aqui, pois J_p resolve a equação de Bessel em $I = (0, +\infty)$ e, portanto, poderia existir uma sequência de zeros de J_p se acumulando em 0.

³Isso requer mais sobre a teoria de séries de potências do que dispomos.

em $(0, x_0)$, com $F_p(x) = \frac{2^{2p}}{f(x)^2}$ em $(-x_0, x_0)$. Então, $F_p(0) = 2^{2p}$ e

$$F_p(x) = \sum_{n \geq 0} A_n x^n,$$

para certos $A_n \in \mathbb{R}$. Portanto, temos em $(0, x_0)$ que

$$\frac{1}{x J_p(x)^2} = \frac{1}{x^{2p+1}} \cdot F_p(x) = \frac{1}{x^{2p+1}} \cdot \sum_{n \geq 0} A_n x^n.$$

É possível provar que $A_{2p} \neq 0$. Admitindo esse fato, segue de (7) que, no intervalo $(0, x_0)$,

$$\begin{aligned} y(x) &= J_p(x) \int_c^x \frac{1}{t^{2p+1}} \cdot \sum_{n \geq 0} A_n t^n dt \\ &= J_p(x) \sum_{n \geq 0} \int_c^x A_n t^{n-2p-1} dt, \end{aligned}$$

sendo a segunda igualdade consequência do item (b) Teorema 5 da nota de aula “*Série de Potências*”. Então,

$$\begin{aligned} y(x) &= J_p(x) \left(\sum_{0 \leq n \neq 2p} A_n \int_c^x t^{n-2p-1} dt + A_{2p} \int_c^x t^{-1} dt \right) \\ &= J_p(x) \left(\sum_{0 \leq n \neq 2p} \frac{A_n}{n-2p} (x^{n-2p} - c^{n-2p}) + A_{2p} (\log x - \log c) \right). \end{aligned}$$

Denotando por C a constante real $C = \sum_{0 \leq n \neq 2p} \frac{A_n c^{n-2p}}{n-2p} + A_{2p} \log c$, segue dos cálculos acima que

$$y(x) = J_p(x) \sum_{0 \leq n \neq 2p} \frac{A_n}{n-2p} x^{n-2p} - C J_p(x) + A_{2p} J_p(x) \log x.$$

Mas, como J_p é solução da equação de Bessel de ordem p , que é linear, concluímos que

$$z(x) := J_p(x) \sum_{0 \leq n \neq 2p} \frac{A_n}{n-2p} x^{n-2p} + A_{2p} J_p(x) \log x$$

também é solução.

Agora, note que, em $(0, x_0)$,

$$\begin{aligned} z(x) &= J_p(x) x^{-2p} \sum_{0 \leq n \neq 2p} \frac{A_n}{n-2p} x^n + A_{2p} J_p(x) \log x \\ &= \frac{1}{2^p} \cdot x^{-p} \left(\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \right) \left(\sum_{0 \leq n \neq 2p} \frac{A_n}{n-2p} x^n \right) \\ &\quad + A_{2p} J_p(x) \log x \\ &= x^{-p} \sum_{n \geq 0} \tilde{A}_n x^n + A_{2p} J_p(x) \log x, \end{aligned}$$

para certas constantes reais $\tilde{A}_n$ (os coeficientes do produto das séries de potências entre parênteses). Então, multiplicando ambos os lados da igualdade acima por A_{2p}^{-1} , concluímos que a equação de Bessel de ordem $p \in \mathbb{Z}_+$ tem, em $(0, x_0)$, uma solução da forma

$$Y_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n \geq 0} C_n x^n. \quad (8)$$

(Aqui, $C_n = A_{2p}^{-1} \tilde{A}_n$, para todo $n \geq 0$.)

Vamos mostrar que Y_p está definida em $(0, +\infty)$, e não somente em $(0, x_0)$. Para tanto, substituindo Y_p , dada como acima, na equação de Bessel de ordem p e calculando recursivamente os coeficientes C_n , obtemos (por ora você pode assumir que os

valores abaixo estão corretos)

$$\begin{aligned}
 Y_p(x) &= J_p(x) \log x \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p} \sum_{n=0}^{p-1} \frac{(p-n-1)!}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2}\right)^p \sum_{n \geq 0} \frac{h_n + h_{n+p}}{n!(n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},
 \end{aligned} \tag{9}$$

com $h_0 = 0$ e $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ para $n \geq 1$. (A segunda linha acima não existe se $p = 0$.)

Tendo em vista que os coeficientes nas últimas duas linhas de (9) foram calculados a partir de (8) e do fato de que Y_p resolve a equação de Bessel de ordem p em $(0, x_0)$, a fim de que Y_p resolva tal equação em $(0, +\infty)$ é suficiente mostrar que a série

$$\sum_{m \geq 0} \frac{h_m + h_{m+p}}{m!(m+p)!} x^m, \tag{10}$$

obtida da série da última linha de (9) trocando $\left(\frac{x}{2}\right)^2$ por x , converge em $(0, +\infty)$.

Vamos mostrar que tal série converge em toda a reta. Para tanto, recorde que $h_m = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$ para $m \geq 1$, de forma que $\lim_{m \rightarrow +\infty} h_m = +\infty$ (pois a série harmônica diverge). Então, pondo $u_n = \frac{h_n + h_{n+p}}{n!(n+p)!}$, temos que

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{h_{n+1} + h_{n+1+p}}{h_n + h_{n+p}} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+1+p)} \\
 &= \frac{h_n + h_{n+p} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+p}}{h_n + h_{n+p}} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+1+p)} \\
 &= \left(1 + \frac{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1+p}}{h_n + h_{n+p}}\right) \cdot \frac{1}{(n+1)(n+1+p)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, pelo teste da razão, o raio de convergência da série (10) é realmente $+\infty$.

Estudo & Problemas

1. Leia o restante da seção 6 do livro-texto.
2. Complete a demonstração do Lemma 2, mostrando que $\lim_{x \rightarrow 0+} J_0(x) = 1$ e $\lim_{x \rightarrow 0+} Y_0(x) = -\infty$.
3. Mostre que

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x \quad \text{e} \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos x.$$

4. Mostre que, para $x > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{d}{dx}(x^p J_p(x)) &= x^p J_{p-1}(x). \\ \text{(b)} \quad \frac{d}{dx}(x^{-p} J_p(x)) &= -x^{-p} J_{p+1}(x). \end{aligned}$$

5. Seja $F_p(x) = x^p J_p(x)$ e $G_p(x) = x^{-p} J_p(x)$, para $x > 0$. Note que cada zero positivo de J_p é um zero de F_p e também de G_p . Use o Teorema de Rôlle e o problema anterior para mostrar que os zeros positivos de J_p e J_{p+1} se alternam. O que o Teorema de Comparação de Sturm diz a respeito dessa situação?

6. Mostre que, para $x > 0$, tem-se:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \frac{p}{x} J_p(x) + J'_p(x) &= J_{p-1}(x). \\ \text{(b)} \quad \frac{p}{x} J_p(x) - J'_p(x) &= J_{p+1}(x). \end{aligned}$$

(Sugestão: use as relações do problema 4.)

7. Mostre que, para $x > 0$, tem-se:

(a) $J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x).$

(b) $J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J'_p(x).$

8. Mostre que, para $x > 0$, tem-se:

(a) $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (J_p(x)^2 + J_{p+1}(x)^2) = \frac{p}{x} J_p(x)^2 - \frac{p+1}{x} J_{p+1}(x)^2.$

(b) $\frac{d}{dx} (x J_p(x) J_{p+1}(x)) = x (J_p(x)^2 - J_{p+1}(x)^2).$

9. Mostre que, para $x > 0$, tem-se:

(a) $J_0(x)^2 + 2 \sum_{n \geq 1} J_n(x)^2 = 1.$

(b) $\sum_{n \geq 0} x J_n(x) J_{n+1}(x) = \frac{1}{2} \int_0^x t J_0(t)^2 dt.$

(Sugestão: derive os primeiros membros e, em seguida, use as fórmulas do problema anterior.)

10. Verifique que os coeficientes em (9) estão corretos. (Sugestão: use o fato de que Y_p resolve a equação de Bessel de ordem p em $(0, x_0)$ para obter uma recorrência para os C_n . Em seguida, prove por indução que, partindo de $C_0 = -\frac{(p-1)!}{2^{p+1}}$, os demais valores em (9) estão corretos.)