25. A Importância Física das Funções de Bessel

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

Uma das aplicações físicas mais simples das funções de Bessel ocorre na modelagem das vibrações de uma *membrana circular*. Por membrana circular, entendemos uma porção plana de um material flexível, de formato circular, mantida esticada em um estado de tensão uniforme e colada ao longo de seu bordo a um suporte fixo (por exemplo, o tampo de couro de um tambor, o qual é esticado uniformemente e colado à caixa do tambor).

Quando esta membrana é levemente deslocada de sua posição de equilíbrio e então liberada, as forças de restauração devidas à deformação fazem-na vibrar. Isso também ocorre quando ela recebe um estímulo externo, que pode ser momentâneo ou intermitente (como quando percutimos um tambor).

Considere uma membrana circular de raio R e massa m, submetida a uma tensão uniforme T e sujeita a pequenas oscilações. Tome um sistema cartesiano xOy de coordenadas, cuja origem coincide com o centro O da membrana. Considerações físicas simples (veja o Apêndice B do livro-texto, por exemplo), garantem que a oscilação longitudinal $z = z(x, y, t)$ satisfaz a

Figura 1: o tampo de um tambor como membrana circular.

Equação da Onda bidimensional

$$a^2\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \tag{1}$$

em que $a^2 = T/m$ e Δz é o laplaciano de z, dado em coordenadas cartesianas por

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

A geometria da membrana (isto é, o fato dela ser circular) sugere ser mais conveniente considerar coordenadas polares (r, θ) centradas em O, com $\theta = 0$ correspondendo ao semieixo positivo das abscissas (veja a figura a seguir). A relação entre esses dois sistemas de coordenadas é obtida aplicando as relações trigonométricas ao triângulo retângulo OPQ, e fornece

$$x = r\cos\theta \quad \text{e} \quad y = r\,\text{sen}\,\theta.$$

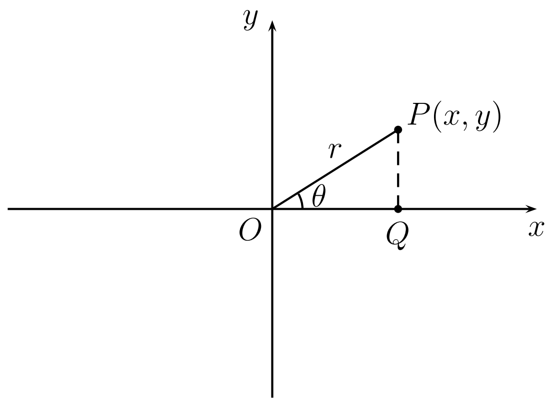

Figura 2: coordenadas cartesianas $\times$ polares.

Não é difícil convencer-se de que, em uma vizinhança de todo ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, as coordenadas r e θ são funções diferenciáveis de x e y; por exemplo, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e, para P no primeiro quadrante, $\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$. A partir daí, não é difícil calcular

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \qquad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

Procedendo como na aula "*A Importância Física da Equação e dos Polinômios de Legendre*", obtemos, com o auxílio da regra da cadeia,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{r},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos\theta}{r},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial x} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial x} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \right) \cos\theta \\
&\quad - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \cos\theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \right) \frac{\operatorname{sen}\theta}{r} \\
&= \ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial y} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} \\
&= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos\theta}{r} \right) \operatorname{sen}\theta \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial z}{\partial r} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\cos\theta}{r} \right) \frac{\cos\theta}{r} \\
&= \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2},$$

de sorte que (1) se torna, em coordenadas polares,

$$a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{2}$$

Por simplicidade, assumimos que o raio R da membrana vale 1. Como o bordo da membrana é fixo, devemos ter

$$z(1, \theta, t) = 0. \tag{3}$$

Assim, o problema que temos de resolver é encontrar uma solução de (2) satisfazendo a **condição de contorno** (3) e certas condições iniciais que especificaremos mais adiante.

Para resolver tal equação, comecemos procurando soluções particulares não triviais da forma

$$z(r,\theta,t) = u(r)v(\theta)w(t), \tag{4}$$

com $u, v, w \neq 0$. (Esse é o **método de separação de variáveis** atuando novamente.)

Substituindo em (2) e, em seguida, dividindo ambos os membros por a^2uvw, obtemos

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{w''(t)}{w(t)}.$$

Uma vez que o lado esquerdo da equação acima só depende de r e θ, ao passo que o lado direito só depende de t, ambos os lados devem ser iguais a uma constante, digamos

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = \kappa = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{w''(t)}{w(t)}.$$

Por outro lado, para que a membrana vibre, $w(t)$ deve ser periódica; mas, como sabemos, soluções periódicas de

$$w'' - \kappa a^2 w = 0$$

só ocorrem para $\kappa < 0$, digamos, $\kappa = -\lambda^2$, com $\lambda > 0$. Então, temos

$$\frac{u''(r)}{u(r)} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u'(r)}{u(r)} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{v''(\theta)}{v(\theta)} = -\lambda^2$$

e

$$w'' + (\lambda a)^2 w = 0.$$

Assim,

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + r \frac{u'(r)}{u(r)} + \lambda^2 r^2 = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)} \tag{5}$$

e

$$w(t) = A_1 \cos(\lambda a t) + A_2 \operatorname{sen}(\lambda a t),$$

para certas constantes reais A_1 e A_2.

Em (5), temos uma função de r no primeiro membro e uma função de θ no segundo membro, de forma que os dois lados também devem ser constantes, digamos

$$r^2 \frac{u''(r)}{u(r)} + r \frac{u'(r)}{u(r)} + \lambda^2 r^2 = \tau = -\frac{v''(\theta)}{v(\theta)}.$$

Mas, como o ângulo θ só está determinado a menos de um múltiplo inteiro de 2π, a função v deve ser periódica de período 2π. Então, como

$$v'' + \tau v = 0,$$

concluímos que $\tau = n^2$, para algum $n \in \mathbb{Z}_+$. Segue, pois, que

$$r^2 u''(r) + r u'(r) + (\lambda^2 r^2 - n^2) u(r) = 0 \tag{6}$$

e

$$v(\theta) = B_1 \cos(n\theta) + B_2 \operatorname{sen}(n\theta),$$

para certas constantes reais B_1 e B_2.

A substituição de variável $s = \lambda r$ dá $u(r) = \tilde{u}(s)$, de forma que $u'(r) = \tilde{u}'(s)\lambda$, $u''(r) = \tilde{u}''(s)\lambda^2$. Então, (6) dá

$$r^2 \cdot \lambda^2 \tilde{u}''(s) + r \cdot \lambda \tilde{u}'(s) + (\lambda^2 r^2 - n^2)\tilde{u}(s) = 0$$

ou, ainda,

$$s^2 \tilde{u}''(s) + s\tilde{u}'(s) + (s^2 - n^2)\tilde{u}(s) = 0.$$

Assim, $\tilde{u}$ é uma solução da equação de Bessel de ordem n, de forma que

$$\tilde{u}(s) = C_1 J_n(s) + C_2 Y_n(s),$$

para certas constantes reais C_1 e C_2.

Como $\tilde{u}(s) = u(r)$ é necessariamente limitada quando $r \to 0+$, a discussão da aula anterior garante que $C_2 = 0$. Dessa forma, $\tilde{u}(s) = C_1 J_n(s)$. Também, como $z(1, \theta, t) = 0$ para todos θ e t, devemos ter

$$C_1 J_n(\lambda) = \tilde{u}(\lambda) = u(1) = 0.$$

Tendo em vista que a solução particular (4) deve ser não trivial, não podemos ter $C_1 = 0$, de sorte que λ deve ser um zero de J_n. Em resumo,

$$u(r) = C_1 J_n(\lambda r), \ \text{ com } \ J_n(\lambda) = 0.$$

Essa é uma primeira importância física de estudarmos os zeros das funções de Bessel de primeiro tipo.

Até aqui, construímos soluções particulares de (1) da forma

$$J_n(\lambda r)(B_1 \cos(n\theta) + B_2 \operatorname{sen}(n\theta))(A_1 \cos(\lambda a t) + A_2 \operatorname{sen}(\lambda a t)),$$

onde λ é um zero positivo de J_n.

A ideia, agora, é *superpor* um número infinito de soluções particulares como acima, a fim de contemplar uma certa **condição inicial** $z(r, \theta, 0)$ para a vibração da membrana. Um caso particular simples, mas ainda ilustrativo, consiste em considerar uma deformação da membrana que só dependa de r e liberá-la a partir do repouso. Matematicamente, isso significa impor que

$$z(r, \theta, 0) = f(r) \ \text{ e } \ \frac{\partial z}{\partial t}(r, \theta, 0) = 0, \tag{7}$$

em que $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é uma função suave dada, com $f(1) = 0$.

A primeira parte de (7) sugere que não é interessante superpormos soluções particulares com $n > 0$ (pois, em tais casos,

$B_1 \cos(n\theta) + B_2 \operatorname{sen}(n\theta)$ não será independente de θ, caso $B_1 \neq 0$ ou $B_2 \neq 0$). Então, devemos tentar satisfazer (7) superpondo soluções da forma

$$J_0(\lambda r)(A_1 \cos(\lambda a t) + A_2 \operatorname{sen}(\lambda a t)), \tag{8}$$

em que λ é um zero de J_0 (recorde que $J_0(0) = 1$).

Por outro lado, a segunda parte de (7) é satisfeita para todas as soluções particulares (8) tais que $A_2 = 0$. Assim, superpondo funções do tipo $J_0(\lambda r)\cos(\lambda a t)$, em que λ é um zero de J_0, queremos satisfazer a condição inicial $z(r, \theta, 0) = f(r)$.

Recordando que os zeros de J_0 formam uma sequência infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \to +\infty$, queremos encontrar constantes reais a_k tais que

$$z(r, \theta, t) = \sum_{k \geq 1} a_k J_0(\lambda_k r) \cos(\lambda_k a t),$$

com

$$f(r) = \sum_{k \geq 1} a_k J_0(\lambda_k r). \tag{9}$$

Por um lado, veja que a independência de $z(r, \theta, 0) = f(r)$ em relação a θ força a independência de $z(r, \theta, t)$ em relação a θ. Por outro lado, sendo f suave, é possível provar (veja a seção 47 do livro-texto) que os coeficientes a_n podem ser escolhidos de forma a satisfazer (9), a qual é denominada a **expansão de Bessel** de f. Mais precisamente, devemos tomar

$$a_k = \frac{2}{J_1(\lambda_k)^2} \int_0^1 r f(r) J_0(\lambda_k r) dr.$$

Algumas animações instrutivas, mostrando modos de vibração de uma membrana circular, podem ser encontradas procurando *vibrations of a circular membrane* na Wikipedia em Inglês.

Estudo & Problemas

1. Leia o apêndice B do capítulo 8 do livro-texto e complete os cálculos que levaram a (2).