26. Apresentando a Transformada de Laplace

Prof. Antonio Caminha*

7 de março de 2022

A ideia da transformada de Laplace é construir um operador linear $\mathcal{L}$ que atua sobre funções *destruindo derivadas*, de forma que uma EDO de coeficientes constantes, por exemplo

$$y'' + ay' + by = r(x),$$

corresponda, após aplicarmos $\mathcal{L}$, a uma *equação algébrica* tendo por incógnita a função $Y = \mathcal{L}(y)$.

No caso do exemplo acima, sendo r definida em $[0, +\infty)$, impondo que $y(0) = y'(0) = 0$ e denotando $R = \mathcal{L}(r)$, tal equação algébrica será

$$p^2Y + apY + bY = R(p),$$

de modo que

$$Y(p) = \frac{R(p)}{p^2 + ap + b}.$$

Então, se $\mathcal{L}$ for invertível, teremos

$$y = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R(p)}{p^2 + ap + b}\right).$$

Nesta aula, desenvolveremos tais ideias rigorosamente. Contudo, antes de prosseguirmos, é conveniente recordar o teste da comparação para convergência de integrais impróprias: se $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ é integrável em todo intervalo da forma $[a, b]$, com $b > a$, então

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \text{ converge } \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

Além disso, sendo esse o caso, vale a desigualdade

$$\left| \int_a^{+\infty} f(x) dx \right| \leq \int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \tag{1}$$

Definição 1. *Dada $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$, definimos sua* **transformada de Laplace** $F = \mathcal{L}(f)$ *em $p \in \mathbb{R}$ por*

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx,$$

contanto que a integral imprópria acima convirja.

Observação 2. *Ainda em relação à definição anterior, se $f = u + iv$, com $u, v : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, então (também por definição)*

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-px} u(x) dx + i \int_0^{+\infty} e^{-px} v(x) dx,$$

contanto que todas as integrais existam. (Teremos mais a dizer sobre isso ainda nesta aula.)

Antes de desenvolver a teoria, vejamos alguns exemplos de cálculo de transformadas de Laplace.

Exemplos 3.

(a) Dado $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, temos, para $p > \alpha$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{zx})(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px}e^{zx}dx = \int_0^{+\infty} e^{(z-p)x}dx \\ &= \lim_{a\to+\infty} \frac{e^{(z-p)x}}{z-p}\Big|_{x=0}^{x=a} = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{z-p}(e^{(z-p)a} - 1).\end{aligned}$$

Agora,

$$|e^{(z-p)a}| = e^{\mathrm{Re}((z-p)a)} = e^{(\alpha-p)a} \xrightarrow{a} 0.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(e^{zx})(p) = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{z-p}(e^{(z-p)a} - 1) = \frac{1}{p-z},$$

de sorte que $\mathcal{L}(e^{zx})$ está definida em $(\alpha, +\infty)$.

(b) Dado $c \in \mathbb{R}$, seja

$$u_c(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < c \\ 1, & \text{se } x \geq c \end{cases}.$$

Para $p > 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(u_c)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px}u_c(x)dx = \int_c^{+\infty} e^{-px}dx \\ &= \lim_{a\to+\infty} \frac{e^{-px}}{-p}\Big|_{x=c}^{x=a} dx = \lim_{a\to+\infty} \frac{1}{p}(e^{-cp} - e^{-ap}) \\ &= \frac{e^{-cp}}{p}.\end{aligned}$$

Então, $\mathcal{L}(u_c)$ está definida em $(0, +\infty)$.

Por vezes, podemos calcular $\mathcal{L}(f)$ ainda que f esteja definida somente em $(0, +\infty)$ e "*estoure*" à medida que $x \to 0+$. O que importa é a convergência da integral imprópria que define $\mathcal{L}(f)$, uma vez que, caso ela convirja, seu valor é sempre o mesmo, independentemente de como definamos f em 0. A seguir, temos um exemplo relevante.

Exemplo 4. Para calcular $\mathcal{L}(x^{-1/2})$, temos inicialmente, para $p > 0$,

$$\mathcal{L}(x^{-1/2})(p) = \int_0^{+\infty} e^{-px} x^{-1/2}\, dx.$$

Fazendo a mudança de variável $t = px$, temos $dx = \frac{dt}{p}$; como t também varia de 0 a $+\infty$ quando x varia de 0 a $+\infty$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x^{-1/2})(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \left(\frac{t}{p}\right)^{-1/2} \frac{dt}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{p}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sqrt{\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.\end{aligned}$$

O resultado a seguir dá condições suficientes para a existência da transformada de Laplace de uma função.

Proposição 5. *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes em todo intervalo da forma $[0, a]$, com $a > 0$. Se existe $k > 0$ tal que $f = \mathcal{O}(e^{kx})$ em $[0, +\infty)$, então $F := \mathcal{L}(f)$ está definida em $(k + \infty)$. Mais precisamente, se $|f(x)| \leq Ce^{kx}$ para todo $x \geq 0$, então $|F(p)| \leq \frac{C}{p-k}$, para todo $p > k$.*

Prova. Para a boa definição de F em $(k, +\infty)$, o teste da comparação para integrais impróprias garante ser suficiente mostrarmos que a integral imprópria

$$\int_0^{+\infty} e^{-px} |f(x)| dx$$

converge sempre que $p > k$.

Para tanto, veja que, para $a > 0$ e $p > k$, temos

$$\begin{aligned}\int_0^a e^{-px}|f(x)|dx &\leq \int_0^a e^{-px}\cdot Ce^{kx}dx = C\int_0^a e^{(k-p)x}dx\\ &= \frac{C}{k-p}\,e^{(k-p)x}\Big|_{x=0}^{x=a} = \frac{C}{p-k}(1-e^{(k-p)a})\\ &\xrightarrow{a} \frac{C}{p-k}.\end{aligned}$$

$a \to \infty$

Portanto, F realmente está definida em $(k, +\infty)$.

Agora, para $p > k$, segue de (1) que

$$\begin{aligned}|F(p)| &= \left|\int_0^{+\infty} e^{-px}f(x)dx\right| \leq \int_0^{+\infty} e^{-px}|f(x)|dx\\ &= \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-px}|f(x)|dx \leq \lim_{a\to+\infty}\frac{C}{p-k}(1-e^{(k-p)a})\\ &= \frac{C}{p-k}.\end{aligned}$$

$\square$

Doravante, uma função $f : (0, +\infty) \to \mathbb{C}$ satisfazendo as hipóteses da proposição anterior será dita ***admissível com constante k*** para a transformada de Laplace.

Sendo $\mathcal{V}$ o conjunto das funções admissíveis, é imediato que $\mathcal{V}$ é um espaço vetorial complexo. Por exemplo, dadas $f, g \in \mathcal{V}$, temos que $f + g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ é contínua por partes em todo intervalo $[0, a]$, com $a > 0$. Também, sendo $f = \mathcal{O}(e^{kx})$ e $g = \mathcal{O}(e^{lx})$ em $[0, +\infty)$ e para certos $k, l \geq 0$, temos que $f + g = \mathcal{O}(e^{ux})$, com $u = \max\{k, l\}$; realmente, para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}|(f+g)(x)| &= |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|\\ &\leq C_f e^{kx} + C_g e^{lx} \leq C_f e^{ux} + C_g e^{ux}\\ &= Ce^{ux},\end{aligned}$$

em que $C = C_f + C_g$. Assim, $f + g \in \mathcal{V}$.

Temos, agora, o seguinte resultado importante.

Proposição 6. *$\mathcal{L}$ é "linear" em $\mathcal{V}$.*

Prova. Nas notações da discussão anterior, para $f, g \in \mathcal{V}$ e $p > u = \max\{k, l\}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f+g)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px}(f+g)(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-px}(f(x)+g(x))dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-px}f(x)dx + \int_0^{+\infty} e^{-px}g(x)dx \\
&= \mathcal{L}(f)(p) + \mathcal{L}(g)(p).
\end{aligned}$$

Assim, $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ em $\mathrm{Dom}(\mathcal{L}(f)) \cap \mathrm{Dom}(\mathcal{L}(g)) = (k, +\infty) \cap (l, +\infty) = (u, +\infty)$.

Analogamente, $\mathcal{L}(cf) = c\mathcal{L}(f)$, para todos $c \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{V}$. $\square$

Exemplo 7. A fim de calcular $\mathcal{L}(e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x))$ e $\mathcal{L}(e^{\alpha x}\cos(\beta x))$, note inicialmente que $|e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)| \leq e^{\alpha x}$ e $|e^{\alpha x}\cos(\beta x)| \leq e^{\alpha x}$, de sorte que $F = \mathcal{L}(e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x))$ e $G = \mathcal{L}(e^{\alpha x}\cos(\beta x))$ estão definidas em $(\alpha, +\infty)$. Pondo $z = \alpha + i\beta$, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(e^{zx}) &= \mathcal{L}(e^{(\alpha+i\beta)x}) \\
&= \mathcal{L}(e^{\alpha x}\cos(\beta x) + ie^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)) \\
&= \mathcal{L}(e^{\alpha x}\cos(\beta x)) + i\mathcal{L}(e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)) \\
&= F + iG.
\end{aligned}$$

Por outro lado, a definição da transformada de Laplace assegura que $F(p), G(p) \in \mathbb{R}$, para todo $p > \alpha$. Também, vimos no item (a) dos exemplos 3 que

$$\mathcal{L}(e^{zx})(p) = \frac{1}{p-z} = \frac{1}{p-\alpha-i\beta} = \frac{p-\alpha+i\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Assim, para $p > \alpha$, temos

$$F(p) + i\,G(p) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2} + i\,\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$$

de sorte que, tomando partes real e imaginária em ambos os membros dessa igualdade, obtemos

$$F(p) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2} \quad \text{e} \quad G(p) = \frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2},$$

para todo $p > \alpha$.

Para calcular outras transformadas de Laplace, precisamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 8. *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ uma função contínua, derivável por partes em todo intervalo da forma $[0, a]$, com $a > 0$. Se $f' : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ é admissível com constante k, então f também é admissível com constante k. Em particular, $\mathcal{L}(f)$ e $\mathcal{L}(f')$ estão definidas em $(k, +\infty)$.*

Prova. Consideremos primeiramente o caso em que f é uma função real, e suponhamos que $|f'(x)| \leq Ce^{kx}$ para todo $x \geq 0$ e algum $C > 0$.

Fixado $x > 0$, tome reais $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = x$ tais que f é derivável em $[x_{j-1}, x_j]$, para $1 \leq j \leq n$. A desigualdade triangular e o TFC dão

$$\begin{aligned}|f(x)-f(0)| &= \left|\sum_{j=1}^{n}(f(x_j)-f(x_{j-1}))\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|f(x_j)-f(x_{j-1})| \\ &= \sum_{j=1}^{n}\left|\int_{x_{j-1}}^{x_j} f'(t)dt\right| \leq \sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j}|f'(t)|dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{k}\int_{x_{j-1}}^{x_j} Ce^{kt}dt = \sum_{j=1}^{k}\frac{C}{k}\,e^{kt}\Big|_{x_{j-1}}^{x_j} \\ &= \frac{C}{k}(e^{kx}-1) \leq \frac{C}{k}\,e^{kx}.\end{aligned}$$

Assim, novamente pela desigualdade triangular,

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |(f(x)-f(0))+f(0)| \leq |f(x)-f(0)|+|f(0)| \\ &\leq \frac{C}{k}\,e^{kx}+|f(0)|e^{kx} = \tilde{C}e^{kx},\end{aligned}$$

com $\tilde{C} = \frac{C}{k}+|f(0)|$.

Agora, seja $f = g+ih$, com $g, h : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Como $f' = g'+ih'$, as hipóteses sobre f garantem que g e h são funções reais contínuas, deriváveis por partes em todo intervalo da forma $[0,a]$, com $a>0$; também, sendo $|f'(x)| \leq Ce^{kx}$ para $x \geq 0$, temos

$$|g'(x)|, |h'(x)| \leq |f'(x)| \leq Ce^{kx}.$$

Portanto, pela primeira parte da prova, g e h são admissíveis com constante k, de sorte que $|g(x)| \leq C_g e^{kx}$ e $|h(x)| \leq C_h e^{kx}$ para todo $x \geq 0$ (e certas constantes C_g e C_h). Agora, como $f = g+ih$, a Proposição 5 garante que f é admissível com constante k. $\square$

De posse do lema anterior, temos o seguinte resultado importante.

Proposição 9. *Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ uma função contínua dada.*

(a) *Se f é derivável em $[0, +\infty)$ e f' é admissível com constante k, então*

$$\mathcal{L}(f')(p) = p\mathcal{L}(f)(p) - f(0), \ \forall\ p > k.$$

(b) *Se f é duas vezes derivável em $[0, +\infty)$ e f'' é admissível com constante k, então*

$$\mathcal{L}(f'')(p) = p^2\mathcal{L}(f)(p) - f(0)p - f'(0), \ \forall\ p > k.$$

(c) *Se f é admissível com constante k e $g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ é dada para $x \geq 0$ por $g(x) = \int_0^x f(t)dt$, então g é admissível com constante k e*

$$\mathcal{L}(g)(p) = \frac{1}{p}\mathcal{L}(f)(p), \ \forall\ p > k.$$

Prova. O lema anterior garante que, nos itens (a) e (b), as funções envolvidas são admissíveis com constante k.

Fixe $p > k$. Para o item (a), temos (integrando por partes)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f)(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-px} f(x)dx \\
&= \frac{e^{-px}}{-p} f(x)\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-px}}{-p} f'(x)dx \\
&= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{-px}}{-p} f(x) + \frac{1}{p} f(0)\right) + \frac{1}{p}\mathcal{L}(f')(p).
\end{aligned}$$

Mas, como $|f(x)| \leq Ce^{kx}$ para $x \geq 0$, temos

$$e^{-px}|f(x)| \leq Ce^{(k-p)x} \xrightarrow{x} 0.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{1}{p}\, f(0) + \frac{1}{p}\, \mathcal{L}(f')(p)$$

e, resolvendo para $\mathcal{L}(f')(p)$, obtemos a fórmula do enunciado.

O item (b) segue, agora, aplicando duas vezes a fórmula do item (a):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f'')(p) &= p\mathcal{L}(f')(p) - f'(0) \\ &= p\big(p\mathcal{L}(f)(p) - f(0)\big) - f'(0) \\ &= p^2\mathcal{L}(f)(p) - pf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

Para o item (c), note inicialmente que o TFC dá $g' = f$, a qual é, por hipótese, admissível com constante k. Portanto, o lema anterior (com g' no lugar de f') garante que g também é admissível com constante k. Agora, aplicando a g' a fórmula do item (a), obtemos

$$\mathcal{L}(f)(p) = \mathcal{L}(g')(p) = p\mathcal{L}(g)(p) - g(0) = p\mathcal{L}(g)(p),$$

conforme desejado. $\square$

Exemplo 10. *Dados $n \in \mathbb{N}$ e $k \geq 0$, calcule $\mathcal{L}(x^n e^{kx})$.*

Solução. Fixados $\epsilon > 0$ e $m \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^m}{e^{\epsilon x}} = 0$. Então, a função $x \mapsto \frac{x^m}{e^{\epsilon x}}$ é limitada, de forma que existe $C > 0$ tal que $x^m \leq Ce^{\epsilon x}$ para todo $x \geq 0$. Segue que

$$|x^m e^{kx}| \leq Ce^{(k+\epsilon)x}, \ \forall\, x \geq 0,$$

de sorte que $\mathcal{L}(x^m e^{kx})$ está definida em $(k+\epsilon, +\infty)$. Mas, como $\epsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que $\mathcal{L}(x^m e^{kx})$ está definida em $(k, +\infty)$.

Agora, como $(x^n e^{kx})' = nx^{n-1}e^{kx} + kx^n e^{kx}$, a discussão anterior garante que $(x^n e^{kx})'$ é admissível com constante k para a transformada de Laplace. Portanto, o item (a) da proposição anterior dá

$$\mathcal{L}\big((x^n e^{kx})'\big)(p) = p\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big) - x^n e^{kx}(0) = p\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big).$$

Por outro lado, a Proposição 6 garante que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big((x^n e^{kx})'\big) &= \mathcal{L}\big(nx^{n-1}e^{kx} + kx^n e^{kx}\big)\\ &= n\mathcal{L}\big(x^{n-1}e^{kx}\big) + k\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big).\end{aligned}$$

Igualando essas duas expressões para $\mathcal{L}\big((x^n e^{kx})'\big)$, obtemos, para $p > k$,

$$p\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big)(p) = n\mathcal{L}\big(x^{n-1}e^{kx}\big)(p) + k\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big)(p),$$

de sorte que

$$\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big)(p) = \frac{n}{p-k}\,\mathcal{L}\big(x^{n-1}e^{kx}\big)(p).$$

Iterando a recorrência acima e usando (de acordo com o item (a) dos exemplos 3) que $\mathcal{L}(e^{kx})(p) = \frac{1}{p-k}$ para $p > k$, concluímos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(x^n e^{kx}\big)(p) &= \frac{n}{p-k}\,\mathcal{L}\big(x^{n-1}e^{kx}\big)(p)\\ &= \frac{n}{p-k}\cdot\frac{n-1}{p-k}\,\mathcal{L}\big(x^{n-2}e^{kx}\big)(p)\\ &= \cdots\cdots\cdots\\ &= \frac{n}{p-k}\cdot\frac{n-1}{p-k}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{p-k}\,\mathcal{L}\big(e^{kx}\big)(p)\\ &= \frac{n!}{(p-k)^n}\cdot\frac{1}{p-k}\\ &= \frac{n!}{(p-k)^{n+1}}.\end{aligned}$$

$\square$

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 48 do livro-texto e faça os problemas 2 a 4.
2. Leia a seção 49 do livro-texto e faça os problemas 1 a 3. Em particular, veja que o problema 3 da seção 49 dá exemplo de uma função que não possui transformada de Laplace.