

27. A Transformada de Laplace e EDOs

Prof. Antonio Caminha*

1 de julho de 2022

Podemos finalmente explicar em detalhe como usar a transformada de Laplace para resolver EDOs de coeficientes constantes. Ilustremos o método com os dois exemplos a seguir.

Exemplo 1. *Resolva, em $\mathbb{R}$, o PVI*

$$\begin{cases} y' + 4y = 4x \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Solução. Admitindo que y e y' são admissíveis para a transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}(y' + 4y) = \mathcal{L}(4x).$$

em algum intervalo $(k, +\infty)$, com $k \geq 0$.

Denotando $Y = \mathcal{L}(y)$ e aplicando a fórmula do item (a) da Proposição 8 da aula anterior, vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y' + 4y) &= \mathcal{L}(y') + 4\mathcal{L}(y) \\ &= pY - y(0) + 4Y \\ &= (p + 4)Y - 2. \end{aligned}$$

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

O Exemplo 9 da aula anterior dá $\mathcal{L}(x)(p) = \frac{1}{p^2}$ para $p > 0$, logo,

$$(p+4)Y - 2 = \frac{4}{p^2}$$

em $(k, +\infty)$, ou, ainda,

$$Y(p) = \frac{1}{p+4} \left(2 + \frac{4}{p^2} \right) = \frac{2}{p+4} + \frac{4}{(p+4)p^2}.$$

Também por aquele exemplo, temos

$$\frac{1}{p+4} = \mathcal{L}(e^{-4x})$$

para $p > -4$. Quanto à segunda parcela do segundo membro, a decomposição em frações parciais

$$\frac{1}{(p+4)p^2} = \frac{1}{16(p+4)} - \frac{1}{16p} + \frac{1}{4p^2}$$

dá, para $p > -4$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+4)p^2} &= \frac{1}{16} \mathcal{L}(e^{-4x}) - \frac{1}{16} \mathcal{L}(1) + \frac{1}{4} \mathcal{L}(x) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{16} (e^{-4x} - 1 + 4x) \right). \end{aligned}$$

Assim, no intervalo $(k, +\infty)$, temos

$$\begin{aligned} Y(p) &= 2\mathcal{L}(e^{-4x}) + 4\mathcal{L} \left(\frac{1}{16} (e^{-4x} - 1 + 4x) \right) \\ &= \mathcal{L} \left(2e^{-4x} + \frac{1}{4} (e^{-4x} - 1 + 4x) \right) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{9}{4} e^{-4x} - \frac{1}{4} + x \right). \end{aligned}$$

Recordando que $Y = \mathcal{L}(y)$, os cálculos acima dão

$$\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}\left(\frac{9}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4} + x\right),$$

de sorte que um candidato natural para y é

$$y(x) = \frac{9}{4}e^{-4x} - \frac{1}{4} + x.$$

Por fim, uma verificação direta garante que tal função é, de fato, uma solução do PVI do enunciado, e o Teorema de Existência e Unicidade garante que ela é a única. $\square$

Exemplo 2. *Resolva, em $\mathbb{R}$, o PVI*

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = e^{-3x} \cos x \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução. Admitindo que y , y' e y'' são admissíveis para a transformada de Laplace, obtemos

$$\mathcal{L}(y'' + 4y' + 5y) = \mathcal{L}(e^{-3x} \cos x)$$

em algum intervalo $(k, +\infty)$, para um certo $k \geq 0$.

Denotando $Y = \mathcal{L}(y)$ e aplicando a fórmula do item (b) da Proposição 8 da aula anterior, vem que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' + 4y' + 5y) &= \mathcal{L}(y'') + 4\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) \\ &= p^2Y - y(0)p - y'(0) + 4(pY - y(0)) + 5Y \\ &= p^2Y - 2p - 1 + 4(pY - 2) + 5Y \\ &= (p^2 + 4p + 5)Y - (2p + 9). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= -9 \\ \Delta &= \frac{-4 \pm \sqrt{5-4}}{2} \\ e^{-3x} \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \end{aligned}$$

Também, o resultado do Exemplo 6 da aula anterior dá, para $p > -3$,

$$\mathcal{L}(e^{-3x} \cos x)(p) = \frac{p - (-3)}{(p - (-3))^2 + 1^2} = \frac{p + 3}{(p + 3)^2 + 1}.$$

Portanto, temos

$$(p^2 + 4p + 5)Y = 2p + 9 + \frac{p + 3}{(p + 3)^2 + 1}$$

em $(k, +\infty)$ e, daí,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{p^2 + 4p + 5} \left(2p + 9 + \frac{p + 3}{(p + 3)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{2p + 9}{p^2 + 4p + 5} + \frac{p + 3}{(p^2 + 4p + 5)((p + 3)^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Como no exemplo anterior, a ideia, agora, é obter uma função cuja transformada coincida com o segundo membro da expressão acima e, em seguida, aplicar o Teorema de Existência e Unicidade de soluções para o PVI em questão, a fim de concluir que essa função é, de fato, a solução procurada.

Um primeiro passo útil é aplicar decomposição em frações parciais à segunda fração:

$$\frac{p + 3}{(p^2 + 4p + 5)((p + 3)^2 + 1)} = \frac{ap + b}{p^2 + 4p + 5} + \frac{cp + d}{(p + 3)^2 + 1}.$$

Efetuando a soma de frações do segundo membro e comparando os coeficientes dos numeradores, ficamos com (verifique!)

$$\frac{p + 3}{(p^2 + 4p + 5)((p + 3)^2 + 1)} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{p - 1}{p^2 + 4p + 5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{p + 1}{(p + 3)^2 + 1}.$$

Por conseguinte,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{2p + 9}{p^2 + 4p + 5} - \frac{1}{5} \cdot \frac{p - 1}{p^2 + 4p + 5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{p + 1}{(p + 3)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{5} \left(\frac{9p + 46}{p^2 + 4p + 5} + \frac{p + 1}{(p + 3)^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Como segundo passo, observando que

$$p^2 + 4p + 5 = (p + 2)^2 + 1,$$

aplicamos as fórmulas do Exemplo 6 da aula anterior para obter

$$\begin{aligned}\frac{9p + 46}{p^2 + 4p + 5} &= \frac{9(p + 2)}{(p + 2)^2 + 1} + \frac{28}{(p + 2)^2 + 1} \\ &= 9\mathcal{L}(e^{-2x} \cos x) + 28\mathcal{L}(e^{-2x} \sin x) \\ &= \mathcal{L}(9e^{-2x} \cos x) + \mathcal{L}(28e^{-2x} \sin x) \\ &= \mathcal{L}(e^{-2x}(9 \cos x + 28 \sin x))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{p + 1}{(p + 3)^2 + 1} &= \frac{p + 3}{(p + 3)^2 + 1} - \frac{2}{(p + 3)^2 + 1} \\ &= \mathcal{L}(e^{-3x} \cos x) - 2\mathcal{L}(e^{-3x} \sin x) \\ &= \mathcal{L}(e^{-3x} \cos x - 2e^{-3x} \sin x) \\ &= \mathcal{L}(e^{-3x}(\cos x - 2 \sin x)).\end{aligned}$$

Juntando os cálculos acima, vem que

$$\begin{aligned}Y &= \frac{1}{5} \left(\frac{9p + 46}{p^2 + 4p + 5} + \frac{p + 1}{(p + 3)^2 + 1} \right) \\ &= \frac{1}{5} (\mathcal{L}(e^{-2x}(9 \cos x + 28 \sin x)) + \mathcal{L}(e^{-3x}(\cos x - 2 \sin x))) \\ &= \mathcal{L} \left(\frac{1}{5} e^{-2x}(9 \cos x + 28 \sin x) + \frac{1}{5} e^{-3x}(\cos x - 2 \sin x) \right).\end{aligned}$$

Como $Y = \mathcal{L}(y)$, uma possibilidade natural para y é

$$y = \frac{1}{5} e^{-2x}(9 \cos x + 28 \sin x) + \frac{1}{5} e^{-3x}(\cos x - 2 \sin x).$$

Por fim, é fácil verificar que tal função é, de fato, solução do PVI do enunciado, de forma que, pelo Teorema de Existência e Unicidade, é a função desejada. $\square$

Nos dois exemplos acima, utilizamos o fato de que, se y e f são funções contínuas satisfazendo $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$, então *uma possibilidade* é $y = f$. Uma afirmação mais forte é verdadeira: se $\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(f)$, então *a única possibilidade* é $y = f$. Esse é o conteúdo do seguinte resultado de M. Lerch¹, que, por ora, assumiremos sem demonstração.

Teorema 3 (Lerch). *Sejam $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas e admissíveis para a transformada de Laplace. Se $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ em seu domínio comum, então $f = g$ em $[0, +\infty)$.*

O problema a seguir, uma vez resolvido, dará mais flexibilidade à aplicação da transformada de Laplace à solução de EDOs.

Problema 4. *Sejam $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas e admissíveis para a transformada de Laplace. Encontre todas as funções $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, contínuas, admissíveis para a transformada de Laplace e tais que*

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g). \quad (1)$$

O Teorema de Lerch garante que há no máximo uma função h com as propriedades do enunciado. Realmente, se $h_1, h_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ forem funções contínuas, admissíveis para a transformada de Laplace e satisfazendo (1), então $\mathcal{L}(h_1) = \mathcal{L}(h_2)$ em seu domínio comum, de sorte que $h_1 = h_2$ em $[0, +\infty)$.

A fim de resolver o problema anterior, precisamos da seguinte

Definição 5. *Dadas funções contínuas $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, sua convolução é a função $f * g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt,$$

para todo $x \geq 0$.

¹Mathias Lerch, matemático tcheco dos séculos XIX e XX.

Inicialmente, veja que a definição tem sentido, uma vez que as funções $t \mapsto f(t)$ e $t \mapsto g(x-t)$ são contínuas (logo, integráveis) em $[0, x]$. Por outro lado (veja o problema 4), $f * g = g * f$.

Uma vez que a transformada de Laplace de uma função envolve o cálculo de uma integral em que ela participa, um propriedade essencial da convolução é aquela dada pela seguinte

Proposição 6. *Se $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ são contínuas, então $f * g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ também é contínua.*

Prova. Mostraremos que $f * g$ é contínua em todo $x_0 > 0$. (Para a continuidade em $x_0 = 0$, veja o problema 5.)

Para $x > 0$, temos

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| &= \\ &= \left| \int_0^x f(t)g(x-t)dt - \int_0^{x_0} f(t)g(x_0-t)dt \right| \\ &= \left| \int_0^x f(t)g(x-t)dt - \int_0^{x_0} f(t)g(x-t)dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{x_0} f(t)g(x-t)dt - \int_0^{x_0} f(t)g(x_0-t)dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^x f(t)g(x-t)dt - \int_0^{x_0} f(t)g(x-t)dt \right| + \\ &\quad + \left| \int_0^{x_0} f(t)g(x-t)dt - \int_0^{x_0} f(t)g(x_0-t)dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x f(t)g(x-t)dt \right| + \left| \int_0^{x_0} f(t)(g(x-t) - g(x_0-t))dt \right|. \end{aligned}$$

Suponha, agora, que $x > x_0$ (o caso $0 < x < x_0$ pode ser tratado de maneira análoga). Então, a desigualdade triangular

para integrais dá

$$\begin{aligned} & |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| \leq \\ & \leq \int_{x_0}^x |f(t)| |g(x-t)| dt + \int_0^{x_0} |f(t)| |g(x-t) - g(x_0-t)| dt. \end{aligned}$$

Como precisamos mostrar que $|(f * g)(x) - (f * g)(x_0)|$ está próximo de 0 quando x está próximo a x_0 , podemos, de início, supor que $x < 2x_0$.

Pelo Teorema de Weierstrass, podemos tomar constantes $C_1, C_2 > 0$ tais que $|f| \leq C_1$ e $|g| \leq C_2$ em $[0, 2x_0]$. Então,

$$\int_{x_0}^x |f(t)| |g(x-t)| dt \leq \int_{x_0}^x C_1 C_2 dt = C_1 C_2 (x - x_0).$$

Por outro lado, como toda função contínua definida num intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua, dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que

$$u, v \in [0, 2x_0], |u - v| < \delta \Rightarrow |g(u) - g(v)| < \epsilon.$$

Supondo, adicionalmente, que $\delta < x_0$ (o que não é perda de generalidade), temos, para $t \in [x_0, x]$, que

$$\begin{aligned} 0 < x - x_0 < \delta &\Rightarrow x \in [0, 2x_0] \text{ e } |(x-t) - (x_0-t)| < \delta \\ &\Rightarrow \int_0^{x_0} \underbrace{|f(t)|}_{\leq C_1} \underbrace{|g(x-t) - g(x_0-t)|}_{< \epsilon} dt \leq C_1 x_0 \epsilon. \end{aligned}$$

Juntando essas duas estimativas e impondo que $\delta < \epsilon$ de início (o que também não é perda de generalidade), obtemos

$$\begin{aligned} |(f * g)(x) - (f * g)(x_0)| &\leq C_1 C_2 (x - x_0) + C_1 x_0 \epsilon \\ &\leq C_1 (C_2 + x_0) \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow x_0+} (f * g)(x) = (f * g)(x_0)$.

Estimativas análogas (veja o problema 6) garantem que também tem-se $\lim_{x \rightarrow x_0-} (f * g)(x) = (f * g)(x_0)$, de sorte que $f * g$ é contínua em x_0 . $\square$

Por fim, se f e g forem admissíveis para a transformada de Laplace com constante k , então

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_0^x f(t)g(x-t)dt \right| \leq \int_0^x |f(t)||g(x-t)|dt \\ &\leq \int_0^x C_f e^{kt} C_g e^{k(x-t)} dt = C \int_0^x e^{kx} dt \\ &= Cx e^{kx} \end{aligned}$$

($C = C_f C_g$), e um argumento análogo ao apresentado no início da solução do Exemplo 9 da aula anterior garante que $f * g$ é admissível para a transformada de Laplace, também com constante k .

O teorema a seguir resume a discussão acima e responde ao problema colocado anteriormente. Sua demonstração pode ser omitida numa primeira leitura.

Teorema 7 (da convolução). *Sejam $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ funções contínuas e admissíveis para a transformada de Laplace, com constante k . Então, $f * g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ também é contínua e admissível para a transformada de Laplace com constante k , e tal que*

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g)$$

em $(k, +\infty)$.

Prova. Para $p > k$, segue do Teorema de Fubini que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-pv} g(v) dv \right) \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pu} f(u) du \right) e^{-pv} g(v) dv \\
 &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} e^{-p(u+v)} f(u) g(v) du \right) dv \\
 &= \iint_Q e^{-p(u+v)} f(u) g(v) du dv,
 \end{aligned}$$

onde $Q = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ é o primeiro quadrante do plano uv .

Agora, se $A = \{(x, y); x \geq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq x\}$ e $\varphi : A \rightarrow Q$ é dada por

$$\varphi(x, y) = (y, x - y),$$

então φ é uma bijeção diferenciável com inversa diferenciável.

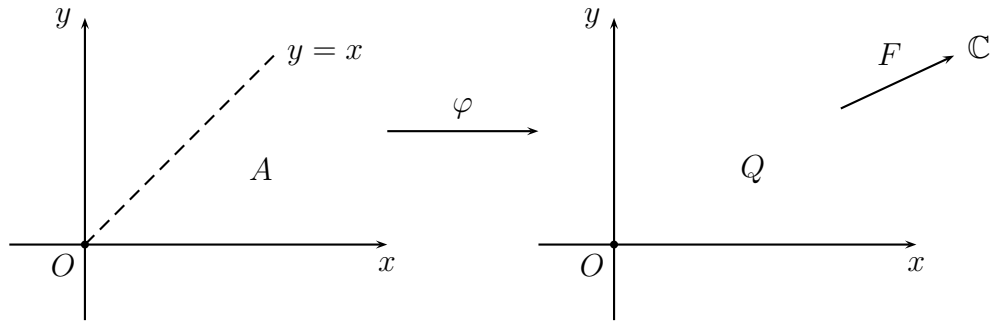


Figura 1: efeito da transformação φ .

Daí, para $F : Q \rightarrow \mathbb{C}$ integrável, o TMV em integrais duplas

dá

$$\begin{aligned}\iint_Q F(u, v) du dv &= \iint_{\varphi(A)} F(u, v) du dv \\ &= \iint_A F(\varphi(x, y)) \underbrace{|\det J\varphi(x, y)|}_{=1} dx dy \\ &= \iint_A F(y, x - y) dx dy.\end{aligned}$$

Aplicando a igualdade acima com $F(u, v) = e^{-p(u+v)} f(u)g(v)$, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p) &= \iint_Q F(u, v) du dv = \iint_A F(y, x - y) dx dy \\ &= \iint_A e^{-p(y+x-y)} f(y)g(x - y) dx dy \\ &= \iint_A e^{-px} f(y)g(x - y) dx dy.\end{aligned}$$

Então, recordando a definição de A e aplicando novamente o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f)(p)\mathcal{L}(g)(p) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_0^x e^{-px} f(y)g(x - y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-px} \left(\int_0^x f(y)g(x - y) dy \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-px} (f * g)(x) dx \\ &= \mathcal{L}(f * g)(p).\end{aligned}$$

□

O Teorema da Convolução nos permite efetuar uma parte dos cálculos dos exemplos anteriores evitando o uso (trabalhoso!)

de decomposições em frações parciais. Ilustramos esse ponto a seguir.

Exemplo 8. *Encontre todas as funções contínuas $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ tais que*

$$\mathcal{L}(h)(p) = \frac{p+3}{(p^2+4p+5)(p^2+6p+10)}.$$

Solução. Como

$$\frac{1}{p^2+4p+5} = \frac{1}{(p+2)^2+1} = \mathcal{L}(\underbrace{e^{-2x} \sin x}_{:=f(x)})(p)$$

e

$$\frac{p+3}{p^2+6p+10} = \frac{p+3}{(p+3)^2+1} = \mathcal{L}(\underbrace{e^{-3x} \cos x}_{:=g(x)})(p),$$

queremos que

$$\mathcal{L}(h) = \mathcal{L}(f)\mathcal{L}(g).$$

O Teorema da Convolução, juntamente com o Teorema de Lerch, garantem que

$$\begin{aligned} h(x) &= (f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \\ &= \int_0^x e^{-2t} \sin t \cdot e^{-3(x-t)} \cos(x-t)dt \\ &= e^{-3x} \int_0^x e^t \sin t \cos(x-t)dt \\ &= \frac{e^{-3x}}{2} \int_0^x e^t (\sin x + \sin(2t-x))dt \\ &= \frac{e^{-3x}}{2} \left(\int_0^x e^t \sin x dt + \int_0^x e^t \sin(2t-x)dt \right). \end{aligned}$$

Deixamos para você a tarefa de calcular as integrais em questão.

□

Terminemos esta aula com um exemplo mais “teórico”.

Exemplo 9. *Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$ e uma função $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e admissível para a transformada de Laplace. Sejam $y, u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as únicas soluções dos PVI*

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = v(x) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} u'' + au' + bu = 0 \\ u(0) = 0, u'(0) = 1 \end{cases}.$$

*Admitindo que y e u são admissíveis para a transformada de Laplace, mostre que $y = u * v$.*

Prova. Seja $Y = \mathcal{L}(y)$ e $U = \mathcal{L}(u)$. Aplicando a transformada de Laplace ao primeiro PVI, temos que

$$\mathcal{L}(y'' + ay' + by) = \mathcal{L}(v).$$

Mas

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y'' + ay' + by) &= \mathcal{L}(y'') + a\mathcal{L}(y') + b\mathcal{L}(y) \\ &= p^2Y - y(0)p - y'(0) + a(pY - y(0)) + bY \\ &= (p^2 + ap + b)Y, \end{aligned}$$

de forma que

$$(p^2 + ap + b)Y = \mathcal{L}(v), \quad \forall p \gg 1.$$

Aplicando a transformada de Laplace ao segundo PVI, temos que

$$\mathcal{L}(u'' + au' + bu) = \mathcal{L}(0) = 0,$$

com

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u'' + au' + bu) &= \mathcal{L}(u'') + a\mathcal{L}(u') + b\mathcal{L}(u) \\ &= p^2U - u(0)p - u'(0) + a(pU - u(0)) + bU \\ &= (p^2 + ap + b)U - 1. \end{aligned}$$

Portanto, para $p \gg 1$, temos

$$U(p) = \frac{1}{p^2 + ap + b},$$

de forma que (omitindo p , quando conveniente)

$$Y = \frac{1}{p^2 + ap + b} \cdot \mathcal{L}(v) = U\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(u)\mathcal{L}(v) = \mathcal{L}(u * v).$$

onde aplicamos o Teorema da Convolução na última igualdade acima.

Por fim, como $Y = \mathcal{L}(y)$, o Teorema de Lerch garante que $y = u * v$. $\square$

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 50 do livro-texto, verifique as fórmulas da Tabela 1, página 461, e faça os problemas 1, 2 e 3.
2. Leia a seção 51 do livro-texto, verifique as fórmulas da Tabela 2, página 466, e faça os problemas 1, 2 e 3.
3. Leia a seção 52 do livro-texto até (inclusive) o Exemplo 1, página 470, e faça os problemas 1 e 2.
4. Dadas funções contínuas $f, g : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{C}$, prove que $f * g = g * f$.
5. Complete a demonstração da proposição 6, mostrando que $f * g$ é contínua em $x_0 = 0$ e que, para $x_0 > 0$, tem-se $\lim_{x \rightarrow x_0-} (f * g)(x) = (f * g)(x_0)$.