28. O Teorema de Lerch

Prof. Antonio Caminha*

26 de junho de 2022

O propósito desta aula é demonstrar o Teorema de Lerch. Para tanto, precisamos de alguns preliminares, a começar pelo famoso **Teorema de Aproximação de Weierstrass**.

Teorema 1 (Weierstrass)**.** *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então f é o limite uniforme de uma sequência de polinômios.*

Antes de passar à prova, é útil apresentarmos um argumento heurístico para motivá-la. Para $n \in \mathbb{N}$, a fórmula do binômio de Newton dá

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x)\big(x + (1 - x)\big)^n \\ &= f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k}. \end{aligned}$$

Fazendo $a_0 = a < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$, com $a_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$, a continuidade uniforme de f garante que, para $n \in \mathbb{N}$ grande, os valores $f(x)$ para $x \in [a_{k-1}, a_k]$ não diferem muito de $f(a_k)$.

Isso parece ser bom para $a = 0$ e $b = 1$, mas em geral não deveria ser:

$$f(x) = \sum f(a_k) \cdot \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-k} \quad ?$$

$$\boxed{1 - \frac{x-a}{b-a} = \frac{b-x}{b-a}}$$

Como todo $x \in [a, b]$ pertence a um dos intervalos $[a_{k-1}, a_k]$, esperamos que

$$f(x) \cong \sum_{k=0}^{n} f(a_k) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

para n grande, e a soma acima é uma função polinomial.

Prova. Comecemos supondo que $a = 0$ e $b = 1$, e seja

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Como f é uniformemente contínua em $[0, 1]$, dado $\epsilon > 0$ podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in [0, 1], \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Sendo $M = \max\{|f(t)|; t \in [0, 1]\}$, temos, para $x \in [0, 1]$ fixado, que

$$\begin{aligned}
|f(x) - p_n(x)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| < \delta}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Agora, uma vez que $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2M$

e $|x - \frac{k}{n}| < \delta \Rightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \epsilon$, temos

$$\begin{aligned}|f(x) - p_n(x)| \leq & \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| < \delta}} \epsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ & + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta}} 2M \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.\end{aligned}$$

No segundo membro acima, a primeira soma não excede

$$\sum_{k=0}^{n} \epsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \epsilon\big(x + (1-x)\big)^n = \epsilon.$$

Por outro lado, a dificuldade em estimar a segunda soma reside em estimar quantos inteiros $0 \leq k \leq n$ satisfazem a desigualdade $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta$. Suplantamos esse problema inserindo o fator $\frac{1}{\delta^2}\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \geq 1$ no somatório para obter

$$2M \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ |x - \frac{k}{n}| \geq \delta}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Então, fazendo

$$S = \sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

provamos que

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \epsilon + \frac{2M}{\delta^2} S \tag{1}$$

para todo $x \in [0, 1]$.

Substituindo $\left(x - \frac{k}{n}\right)^2 = x^2 - \frac{2k}{n}x + \left(\frac{k}{n}\right)^2$ na expressão de S, calculamos

$$\begin{aligned}
S &= x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2x \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 - 2x^2 \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 - 2x^2 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned}
\frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} &= \frac{k-1}{n} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= \frac{n-1}{n} \binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1},
\end{aligned}$$

podemos continuar a calcular

$$\begin{aligned} S &= -x^2 + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-1}{n} \binom{n-2}{k-2} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1} \right) x^k (1-x)^{n-k} \\ &= -x^2 + \frac{n-1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= -x^2 + \left(\frac{n-1}{n} \right) x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= -x^2 + \left(\frac{n-1}{n} \right) x^2 + \frac{x}{n} \\ &= \frac{1}{n} \left(x - x^2 \right), \end{aligned}$$

de forma que $S \leq \frac{1}{4n}$ no intervalo $[0, 1]$.

Portanto, de volta a (1), obtemos

$$|f(x) - p_n(x)| \leq \epsilon + \frac{M}{2n\delta^2}, \ \forall \ x \in [0, 1].$$

Agora, é suficiente notar que a última expressão acima é menor que 2ϵ, contanto que $n > \frac{M}{2\epsilon\delta^2}$.

O caso geral é o objeto do problema 1. □

Na demonstração do Teorema de Lerch, utilizaremos uma consequência do Teorema de Aproximação de Weierstrass conhecida como o **Teorema dos Momentos** e enunciada e demonstrada a seguir.

Corolário 2. *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, então f é identicamente nula.*

Prova. A hipótese garante que $\int_a^b f(t)p(t)\,dt = 0$, para todo polinômio p. Agora, dado $\epsilon > 0$, o Teorema de Aproximação de Weierstrass garante a existência de um polinômio p_ϵ tal que

$$|f(t) - p_\epsilon(t)| < \epsilon,\ \forall\ t \in [a,b].$$

Portanto,

$$\int_a^b \big(f(t) - p_\epsilon(t)\big)^2 dt < \int_a^b \epsilon^2 dt = (b-a)\epsilon^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big(f(t) - p_\epsilon(t)\big)^2 dt &= \int_a^b \big(f(t)^2 - 2f(t)p_\epsilon(t) + p_\epsilon(t)^2\big)\,dt \\
&= \int_a^b f(t)^2 dt - 2\int_a^b f(t)p_\epsilon(t)dt + \int_a^b p_\epsilon(t)^2 dt \\
&= \int_a^b f(t)^2 dt + \int_a^b p_\epsilon(t)^2 dt \\
&\geq \int_a^b f(t)^2 dt.
\end{aligned}$$

Combinando as duas desigualdades acima, segue que

$$\int_a^b f(t)^2 dt < (b-a)\epsilon^2.$$

Como essa desigualdade é válida para todo $\epsilon > 0$, segue que $\int_a^b f(t)^2 dt = 0$, logo, $f(t) = 0$ para todo $t \in [a,b]$. $\square$

Podemos finalmente reenunciar e demonstrar o

Teorema 3 (Lerch). *Sejam* $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{C}$ *funções contínuas e admissíveis para a transformada de Laplace. Se* $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ *em seu domínio comum, então* $f = g$ *em* $[0, +\infty)$.

Prova. Se $f = f_1 + if_2$ e $g = g_1 + ig_2$, com $f_j, g_j : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, então $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(f_1) + i\mathcal{L}(f_2)$ e $\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(g_1) + i\mathcal{L}(g_2)$, de forma que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Rightarrow \mathcal{L}(f_j) = \mathcal{L}(g_j)$, para $j = 1, 2$. Como f_j e g_j são contínuas, é suficiente demonstrar o teorema supondo de partida, que f e g são funções reais.

Sejam, pois, $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínuas e tais que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$. Então, $f - g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ também é contínua e tal que $\mathcal{L}(f - g) = 0$. Dessa forma, é suficiente provar que se $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é contínua, admissível para a transformada de Laplace e tal que $\mathcal{L}(f) = 0$, então $f = 0$.

Seja $F = \mathcal{L}(f) : (k, +\infty) \to \mathbb{R}$. Para $l > k$ e $n \in \mathbb{Z}_+$, temos que

$$\begin{aligned} 0 = F(l+n) &= \int_0^{+\infty} e^{-(l+n)x} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-nx} e^{-lx} f(x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-nx} \frac{d}{dx}\left(\int_0^x e^{-lt} f(t)dt\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-nx} u'(x)dx, \end{aligned}$$

em que $u : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é dada por $u(x) = \int_0^x e^{-lt} f(t)dt$.

Como $u(0) = 0$ e $\lim_{a \to +\infty} u(a) = \int_0^{+\infty} e^{-lt} f(t)dt = F(l) = 0$, a fórmula de integração por partes dá

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^{+\infty} e^{-nx}u'(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a e^{-nx}u'(x)dx \\
&= \lim_{a\to+\infty}\left(e^{-nx}u(x)\Big|_{x=0}^{x=a} + n\int_0^a e^{-nx}u(x)dx\right) \\
&= \lim_{a\to+\infty}\left(e^{-na}u(a) + n\int_0^a e^{-nx}u(x)dx\right) \\
&= n\int_0^{+\infty} e^{-nx}u(x)dx.
\end{aligned}$$

Operando a mudança de variáveis $x = -\log t$, com $t \in (0,1)$, segue da última igualdade acima que

$$\int_1^0 e^{n\log t}u(-\log t)\left(-\frac{1}{t}\right)dt = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

ou, ainda,

$$\int_0^1 t^{n-1}u(-\log t)dt = 0,\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Agora, se $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$v(x) = \begin{cases} u(-\log x),\ \text{se } t \in (0,1] \\ 0,\ \text{se } t = 0 \end{cases},$$

então o fato de $\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$ garante que v é contínua. Por outro lado, segue de (2) que

$$\int_0^1 t^m v(t)dt = 0,\ \forall\ m \in \mathbb{Z}_+.$$

Então, o Teorema dos Momentos garante que $v(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$, logo, $u(x) = 0$ para todo $x \in [0,+\infty)$. Mas aí, $e^{-lx}f(x) = u'(x) = 0$, para todo $x \in [0,+\infty)$, de sorte que f é identicamente nula. $\square$

Estudo & Problemas

1. Complete a demonstração do Teorema de Aproximação de Weierstrass, considerando o caso de uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. (Sugestão: a função linear $x \mapsto (1 - x)a + xb$ aplica o intervalo $[0, 1]$ bijetivamente sobre o intervalo $[a, b]$.)