

2. EDOs de Primeira Ordem I: Modelagem I

Prof. Antonio Caminha*

22 de março de 2022

O que fez a teoria de EDOs se desenvolver incessantemente ao longo dos anos, desde os primórdios do Cálculo, foi sua aplicabilidade à resolução de problemas do mundo real.

Na aula anterior já vimos um exemplo nesse sentido: a lei do decaimento radioativo de Rutherford-Soddy nos permite calcular a massa de uma certa substância radioativa presente em um instante específico, uma vez conhecidas sua massa no instante inicial e sua constante de decaimento radioativo. Entretanto, naquele caso, a própria lei experimental já forneceu a EDO, o que torna o exemplo meio sem graça.

Nesta aula e na próxima, vamos dar exemplos mostrando como a *modelagem matemática* de certos problemas leva naturalmente a EDOs. Faremos isso primeiro para EDOs separáveis, pois já sabemos resolvê-las. Contudo, nas próximas aulas, discutiremos a modelagem de outros problemas, os quais nos levarão a EDOs de primeira ordem que não são separáveis.

Considere um cabo *homogêneo, flexível e inextensível*, suspenso a partir de dois pontos A e B e sujeito simplesmente a

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

seu peso. (Por exemplo, um cabo de energia, com A e B representando as conexões do cabo a dois postes.) O fato do cabo ser **flexível** significa que, em cada ponto, a força de tensão $\vec{T}$ ao longo do cabo atua na direção tangente; o fato de ser **inextensível** garante que, uma vez em equilíbrio, a força de tensão não varia com o tempo; por fim, o cabo ser **homogêneo** significa que sua densidade linear de massa é constante.

O problema que desejamos resolver é o de encontrar a equação da curva que representa o formato do cabo, quando em *equilíbrio*. Este problema é conhecido como o **problema do cabo pendente**, tendo sido originalmente proposto por Jakob Bernoulli e resolvido, independentemente, por Gottfried Leibniz, Christiaan Huygens e Johann Bernoulli, ainda no século XVII.

Escolhamos um sistema cartesiano de coordenadas contendo o plano do cabo, no qual seu ponto mais baixo, que denotaremos por O , é a origem e a tangente ao cabo nesse ponto é o eixo das abscissas (veja a figura a seguir):

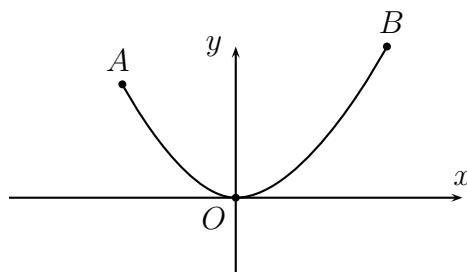


Figura 1: modelando um cabo pendente.

Seja $y = y(x)$ a curva formada pelo gráfico e $P(x, y(x))$ um ponto do mesmo (veja a próxima figura). Considerando o segmento $\widehat{OP}$ do cabo como um corpo rígido em equilíbrio, temos

que sobre ele atuam:

- (i) a tensão $\vec{T}_O$ em O ;
- (ii) a tensão $\vec{T}_P$ em P ;
- (iii) a força-peso $\vec{W}$.

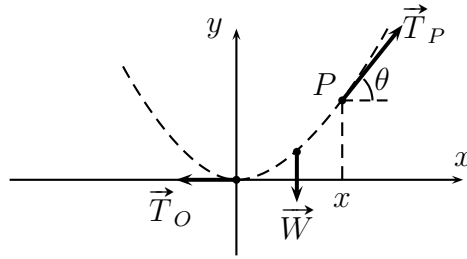


Figura 2: vendo um segmento do cabo como corpo em equilíbrio.

Sendo $\|\vec{T}_P\| = T(x)$ e $\theta = \theta(x) \in [0, \pi]$ o ângulo trigonométrico entre o eixo das abscissas e o vetor $\vec{T}_P$, é imediato que

$$\vec{T}_P = T(x) \cos \theta(x) \vec{i} + T(x) \sin \theta(x) \vec{j},$$

onde $\vec{i} = (1, 0)$ e $\vec{j} = (0, 1)$ são os vetores canônicos em $\mathbb{R}^2$. Também, $\vec{T}_O = -T(0) \vec{i}$.

Quanto ao peso $\vec{W}$, sendo δ a densidade linear de massa do cabo, temos

$$\vec{W} = \delta \cdot \ell(\widehat{OP}) \vec{g},$$

onde $\ell(\widehat{OP})$ denota o comprimento do segmento $\widehat{OP}$ do cabo e $\vec{g}$ é a aceleração da gravidade (logo, $\delta \cdot \ell(\widehat{OP})$ é a massa dessa porção do cabo).

Com a parametrização $\alpha(t) = (t, y(t))$ para o gráfico, sabemos do Cálculo que

$$\begin{aligned}\ell(\widehat{OP}) &= \int_0^x \|\alpha'(t)\| dt = \int_0^x \|(1, y'(t))\| dt \\ &= \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.\end{aligned}$$

Portanto, sendo $g = \|\vec{g}\|$, temos

$$\vec{W} = -\delta g \left(\int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt \right) \vec{j}.$$

Agora, a condição de equilíbrio se traduz matematicamente na soma vetorial

$$\vec{T}_O + \vec{T}_P + \vec{W} = \vec{0}.$$

Substituindo no primeiro membro as expressões para $\vec{T}_O$, $\vec{T}_P$ e $\vec{W}$ deduzidas acima e tomando componentes horizontais e verticais, segue que

$$-T(0) + T(x) \cos \theta = 0$$

e

$$T(x) \sin \theta = \delta g \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.$$

Assim,

$$y'(x) = \operatorname{tg} \theta = \frac{T(x) \sin \theta}{T(x) \cos \theta} = \frac{\delta g}{T(0)} \int_0^x \sqrt{1 + y'(t)^2} dt$$

e o TFC fornece

$$y''(x) = \frac{\delta g}{T(0)} \sqrt{1 + y'(x)^2}. \quad (1)$$

A equação diferencial anterior é uma EDO não linear *de segunda ordem*. Contudo, devido à sua estrutura específica, podemos *reduzir sua ordem* operando a *substituição de variáveis* $u = y'$. Fazendo também $C_0 = \frac{\delta g}{T(0)}$ para simplificar a notação, transformamos (1) na EDO de primeira ordem separável

$$u' = C_0 \sqrt{1 + u^2}.$$

Recorde que escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a tangente ao gráfico em seu ponto mais baixo fosse horizontal. Isso garante que

$$u(0) = y'(0) = \operatorname{tg} \theta(0) = 0$$

e, daí, temos de resolver o PVI

$$\begin{cases} u' = C_0 \sqrt{1 + u^2} \\ u(0) = 0 \end{cases}.$$

Escrevendo $u'(x) = \frac{du}{dx}$, obtemos

$$\frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = C_0 dx,$$

logo,

$$\int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = C_0 \int_0^x dt = C_0 x. \quad (2)$$

A fim de obter uma primitiva para o primeiro membro, fazemos a substituição trigonométrica $v = \operatorname{tg} \alpha$ para obter

$$\frac{1}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sec \alpha} \quad \text{e} \quad dv = \sec^2 \alpha \, d\alpha.$$

Então (recordando que $u = y' = \operatorname{tg} \theta$), temos

$$\begin{aligned} \int_0^u \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} &= \int_0^\theta \frac{1}{\sec \alpha} \cdot \sec^2 \alpha d\alpha = \int_0^\theta \sec \alpha d\alpha \\ &= \log(\sec \alpha + \operatorname{tg} \alpha) \Big|_0^\theta \\ &= \log(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta). \end{aligned} \quad (3)$$

Segue das igualdades (2) e (3) que

$$\log(\sec \theta + \operatorname{tg} \theta) = C_0 x,$$

logo,

$$\sec \theta + \operatorname{tg} \theta = e^{C_0 x}. \quad (4)$$

Agora, um pouco de Trigonometria garante que

$$u = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \sec \theta = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{1 + u^2},$$

de sorte que a equação (4) dá

$$\sqrt{1 + u^2} + u = e^{C_0 x}. \quad (5)$$

Para resolver esta última equação em u , utilizaremos a identidade

$$\frac{1}{\sqrt{1 + u^2} + u} = \sqrt{1 + u^2} - u,$$

obtida pela racionalização do primeiro membro. Com ela, (5) fornece

$$\sqrt{1 + u^2} - u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2} + u} = \frac{1}{e^{C_0 x}} = e^{-C_0 x}.$$

Subtraindo a última igualdade acima de (5), chegamos a

$$u(x) = \frac{e^{C_0 x} - e^{-C_0 x}}{2} = \sinh(C_0 x).$$

Por fim, recordando que $u = y'$ e $y(0) = 0$, obtemos, a partir do TFC,

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_0^x y'(t)dt + y(0) = \int_0^x \sinh(C_0 t)dt \\ &= \frac{1}{C_0}(\cosh(C_0 x) - 1). \end{aligned}$$

Observação 1. O gráfico da função $x \mapsto \frac{1}{a} \cosh(ax)$, com $a > 0$, é conhecido como uma **catenária**. Para ver como seu formato varia com a , consulte a página

<https://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>.

Ao girar a catenária acima em torno do eixo das abscissas, obtemos uma superfície muito importante para a teoria das *superfícies mínimas* (uma subárea da Geometria Diferencial), um *catenóide*:

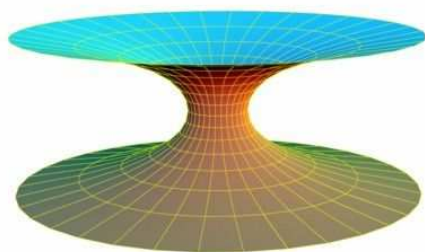


Figura 3: um catenóide.

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 6 do capítulo 1 e faça os problemas 1, 2 e 3.
2. Leia a seção 12 do capítulo 2 e faça os problemas 2 e 4.