

3. EDOs de Primeira Ordem I: Modelagem II

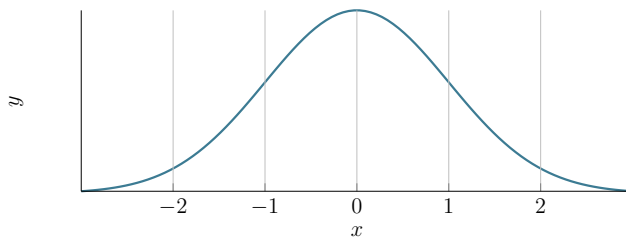
Prof. Antonio Caminha*

22 de março de 2022

A função densidade de probabilidade da distribuição normal padrão, com média 0, é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (1)$$

onde $\pi \cong 3,1415$ e $e \cong 2,7182$ (ambos com quatro casas decimais corretas). A seguir, apresentamos seu gráfico, que é conhecido como a **curva normal padrão**.



*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

Perceba que $f(x) = f(-x)$ para todo x real; logo, o gráfico é simétrico em relação ao eixo y . Além disso, o fator $e^{-\frac{x^2}{2}}$ faz com que os valores de $f(x)$ tornem-se pequenos muito rapidamente, à medida que $|x|$ aumenta.

Para construir os gráficos dessas funções, basta utilizar as seguintes linhas de comando em R (o R é um software gratuito utilizado em Estatística):

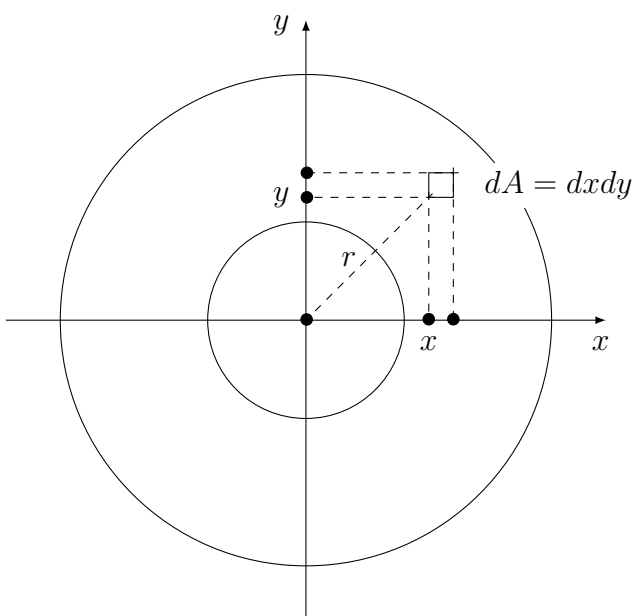
```
x <- seq(-3,3,length=1000)
y <- dnorm(x,mean=0, sd=1)
plot(x,y, type="l", lwd=1)
```

Como trata-se de uma distribuição de probabilidade, a área abaixo da curva limitada pelas retas $x = 0$ e $x = a$ corresponde à probabilidade do resultado de um experimento z , com distribuição normal padrão, ser menor que ou igual a a . Este valor é denotado por $P(0 \leq z \leq a)$.

Os experimentos aleatórios que têm curvas normais como densidades de probabilidade abundam na Natureza, e alguns exemplos são: as alturas dos homens de uma mesma idade em uma grande população, as velocidades das moléculas de um gás perfeito, os resultados de um grande número de medições de uma grandeza física em uma experiência, etc. Aqui, apresentaremos um exemplo de experimento mais *prosaico*, mas não menos interessante, para explicar como a curva normal aparece na descrição de fenômenos aleatórios.

Considere o experimento, suposto aleatório, de lançar um dardo em um alvo circular e observar onde o dardo atinge o alvo. Escolha um sistema cartesiano de eixos com centro no centro do alvo, conforme mostrado na figura a seguir. Seja $f(x)$ a densidade de probabilidade correspondente ao experimento de

o dardo atingir o alvo num ponto de abscissa situada no intervalo $[x, x + dx]$, em que dx representa um pequeno incremento à abscissa x . Por simetria, $f(y)$ é a densidade de probabilidade correspondente ao experimento de o dardo atingir o alvo num ponto de ordenada situada no intervalo $[y, y + dy]$, em que dy representa um pequeno incremento à ordenada y .



Assumindo que $f(t)$ varia *continuamente* com t , temos que $f(x)$ é uma aproximação razoável para f em todo o intervalo $[x, x + dx]$, contanto que o incremento dx seja pequeno. Dessa forma, $f(x)dx$ é uma aproximação razoável para a probabilidade de que o dardo atinja o alvo em um ponto de abscissa situada no intervalo $[x, x + dx]$. Da mesma forma, $f(y)dy$ é uma aproximação razoável para a probabilidade de que o dardo atinja o alvo em um ponto de ordenada situada no intervalo $[y, y + dy]$.

Agora, fazendo a suposição (razoável!) de que os desvios do dardo em relação ao alvo nas direções x e y são independentes

um do outro, temos que o produto

$$f(x)dx \cdot f(y)dy = f(x)f(y)dxdy = f(x)f(y)dA$$

é uma aproximação razoável para a probabilidade de que o dardo atinja o alvo em um ponto do retângulo de área dA mostrado na figura.

Por fim, supondo adicionalmente que o experimento possua *simetria circular* (o que também é razoável), concluímos que a última probabilidade acima será a mesma para todo retângulo de área $dA = dxdy$, situado a uma mesma distância r do centro do alvo. Matematicamente, isto se resume a assumir que $f(x)f(y)$ é uma função de r^2 , que, pelo Teorema de Pitágoras, vale $x^2 + y^2$. Em resumo,

$$f(x)f(y) = g(x^2 + y^2). \quad (2)$$

A partir daí, admitindo que os gráficos das funções f e g são pelo menos de classe C^1 (isto é, são deriváveis, com derivadas contínuas), a regra da cadeia dá

$$f'(x)f(y) = g'(x^2 + y^2) \cdot 2x \quad \text{e} \quad f(x)f'(y) = g'(x^2 + y^2) \cdot 2y.$$

Portanto,

$$\frac{f'(x)f(y)}{2x} = g'(x^2 + y^2) = \frac{f(x)f'(y)}{2y}$$

e, daí,

$$\frac{f'(x)}{2xf(x)} = \frac{f'(y)}{2yf(y)}.$$

Assim, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{f'(x)}{2xf(x)} = c,$$

de sorte que f é solução da EDO separável

$$\frac{u'}{2xu} = c.$$

Escrevendo $u' = \frac{du}{dx}$, obtemos $\frac{du}{u} = 2cxdx$, logo, $\log u = cx^2 + d$ (recorde que $u = f > 0$). Então,

$$f(x) = e^d e^{cx^2} = De^{cx^2},$$

em que $D = e^d$.

Como f é uma densidade de probabilidade, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Então, $c < 0$ e, escrevendo $c = -\frac{1}{2\sigma^2}$, para um certo $\sigma > 0$, obtemos

$$f(x) = De^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Integrando, ficamos com

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = D \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \quad (t = x/\sigma\sqrt{2}) \\ &= D\sigma\sqrt{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = D\sigma\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Portanto, $D = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, logo,

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},$$

que é precisamente (1).

Estudo & Problemas

1. Leia o Apêndice A do capítulo 1.