4. EDOs de Primeira Ordem III: Equações Lineares de Primeira Ordem

Prof. Antonio Caminha*

28 de maio de 2022

Continuando a discussão sobre equações diferenciais ordinárias, situações físicas há (conforme veremos no próximo exemplo) em que se faz necessário considerar problemas de valor inicial do tipo

$$\begin{cases} y' + p(x)y = q(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \tag{1}$$

onde $p, q : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas e $x_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Quando q é a função nula, vimos que a EDO em questão ($y' + p(x)y = 0$) é separável, podendo ser facilmente integrada.

No caso mais geral em que q não necessariamente é identicamente nula, a EDO não é mais separável. Contudo, ela ainda pode ser facilmente integrada com o auxílio de um método heurístico conhecido como **variação dos parâmetros**. Tal método consiste no seguinte: inicialmente, multiplicamos ambos os membros de (1) por uma função auxiliar derivável e não nula $h : I \to \mathbb{R}$ (à qual nos referiremos como o **fator integrante**), obtendo

$$h(x)y' + p(x)h(x)y = q(x)h(x); \tag{2}$$

em seguida, procuramos h de tal forma que o primeiro membro da igualdade acima seja a derivada da função hy.

Se isto for possível, então, após encontrada a função h, teremos

$$(hy)' = h(x)y' + p(x)h(x)y = q(x)h(x); \tag{3}$$

daí, o TFC dará

$$hy\Big|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} (hy)'(s)ds = \int_{x_0}^{x} q(s)h(s)ds,$$

de forma que

$$h(x)y(x) - h(x_0)y(x_0) = \int_{x_0}^{x} q(s)h(s)ds$$

ou, ainda,

$$y(x) = \frac{1}{h(x)}\left(h(x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} q(s)h(s)ds\right). \tag{4}$$

Portanto, para fazer o método de variação dos parâmetros funcionar e terminar de resolver (1), resta mostrarmos que é possível escolher uma função derivável e não nula $h : I \to \mathbb{R}$ tal que (de acordo com (3))

$$h(x)y' + p(x)h(x)y = (hy)' = h'(x)y + h(x)y'.$$

Cancelando a parcela $h(x)y'$, concluímos que h deve satisfazer, em I, a igualdade $h'(x) = p(x)h(x)$; de outro modo, h deve resolver a EDO

$$h' - p(x)h = 0.$$

Conforme visto na primeira aula, podemos tomar

$$h(x) = e^{\int_{x_0}^{x} p(s)ds}, \tag{5}$$

a qual é, de fato, uma função derivável e não nula, definida em I.

Por fim, um cálculo (enfadonho mas) direto permite verificar que, com $h : I \to \mathbb{R}$ dada como em (5), a função $y : I \to \mathbb{R}$ dada como em (4) realmente resolve o problema de valor inicial (1). (Evidentemente, ainda temos que fazer essa checagem, pois encontramos y supondo que ela existisse, o que não é um procedimento logicamente correto.)

Em aplicações, muito melhor que tentar decorar (4) e (5) é lembrar da ideia de procurar $h : I \to \mathbb{R}$ de tal forma que o primeiro membro de (2) seja a derivada de um produto, isto é, tal que $h' = p(x)h$. Vejamos um

Exemplo 1. Resolva o PVI abaixo:

$$\begin{cases} y' + 2xy = \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução. Uma vez que as funções $x \mapsto 2x$ e $x \mapsto \operatorname{sen} x$ estão definidas em toda a reta, aplicamos o método de variação dos parâmetros procurando $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, em

$$hy' + 2xhy = h \operatorname{sen} x, \tag{6}$$

o primeiro membro coincida com $(hy)' = hy' + h'y$. Para tanto, é suficiente que

$$h' = 2xh.$$

Uma possibilidade é $h(x) = e^{x^2}$, com o que (6) fica

$$(e^{x^2} y)' = e^{x^2} \operatorname{sen} x.$$

Então, pelo TFC, temos

$$e^{s^2} y\Big|_0^x = \int_0^x (e^{s^2} y)'(s) ds = \int_0^x e^{s^2} \operatorname{sen} s \, ds,$$

de forma que

$$e^{x^2}y(x) - \underbrace{y(0)}_{=1} = \int_0^x e^{s^2} \operatorname{sen} s \, ds$$

ou, ainda,

$$y(x) = e^{-x^2}\left(1 + \int_0^x e^{s^2} \operatorname{sen} s \, ds\right).$$

$\square$

O restante dessa aula é destinado à análise de uma aplicação para a qual é necessário considerarmos o caso mais geral (1). Por completude, discutimos os conceitos físicos necessários à compreensão da situação.

Exemplo 2. Grosso modo, um **circuito elétrico** é um dispositivo formado pela ligação de vários **elementos elétricos**, tais como *resistores*, *indutores*, *capacitores*, fontes de tensão, fontes de corrente e interruptores, conectados entre si de modo a formarem pelo menos um caminho fechado para o fluxo de corrente elétrica.

Por exemplo, um circuito elétrico simples, alimentado por pilhas, baterias ou tomadas, sempre apresenta uma fonte de energia elétrica, um aparelho elétrico, fios ou placas de ligação e um interruptor para ligar e desligar o aparelho; estando ligado, o circuito elétrico estará *fechado* e uma corrente elétrica o atravessará; por sua vez, essa corrente poderá produzir efeitos os mais variados, como luz, movimentos, aquecimentos, sons etc.

Em um circuito elétrico, a **tensão elétrica** U entre as extremidades de um elemento é a diferença de *potencial elétrico* entre as mesmas, isto é, a diferença de energia elétrica potencial, por unidade de carga elétrica, entre os dois pontos em questão. No

SI, a unidade de energia é o Joule (abreviado J) e a unidade de carga é o Coulomb (abreviado C). Portanto, a unidade de medida para tensão elétrica é J/C, também conhecida por **volt**[1] (abreviado V). Assim, dizer que a tensão existente entre as extremidades de um elemento de um circuito é de 1V é o mesmo que dizer que 1C de carga que atravessa esse elemento transmite 1J de energia.

Em um circuito elétrico, a **corrente elétrica** que atravessa um de seus elementos (dito, então, um **condutor**) é o fluxo de elétrons observado no mesmo. A intensidade $i(t)$ dessa corrente, calculada no instante t, é a taxa de variação temporal instantânea da quantidade Δq de carga elétrica que atravessa o circuito entre as extremidades do condutor em questão:

$$i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}.$$

(O limite acima é uma idealização, a qual ignora a quantização da carga elétrica.) Assim, medindo cargas em Coulombs e intervalos de tempo em segundos, concluímos que a unidade de medida de corrente é C/s, também conhecida como **Ampère**[2] (abreviado A).

Um **resistor** é um elemento elétrico condutor, utilizado em circuitos com uma de duas funções básicas: transformar energia elétrica em energia térmica ou limitar a corrente elétrica que o atravessa (oferecendo, para tanto, resistência à passagem de carga).

Resistores satisfazem a **primeira lei de Ohm**[3]: uma tensão $U(t)$, aplicada às extremidades de um resistor, é diretamente

[1] Em homenagem a Alessandro Volta, físico italiano dos séculos XVIII e XIX.

[2] André-Marie Ampère (1775-1836), físico francês.

[3] Georg Simon Ohm (1789-1854), físico alemão.

proporcional à intensidade $i(t)$ da corrente que o atravessa. Denotando por R tal constante de proporcionalidade, temos

$$R = \frac{U(t)}{i(t)} \tag{7}$$

e dizemos que R é a **resistência elétrica** do resistor. Medindo U em volts e i em Ampères, temos R medida em V/A, unidade conhecida como **Ohm** (abreviamos Ω). Assim, um resistor com uma resistência elétrica de 1Ω causará uma queda de tensão de $1V$ a cada $1A$ de corrente que o atravessar.

$\Omega = \frac{V}{A}$

A **lei de Ampère** do Eletromagnetismo garante que um campo magnético é gerado sempre que uma corrente elétrica atravessa um condutor. Em circuitos elétricos, um **indutor** é um condutor, construído geralmente como uma bobina de material condutor (como, por exemplo, um fio de cobre) envolvendo um núcleo de material ferromagnético, que se vale da lei de Ampère para armazenar energia potencial elétrica no campo magnético gerado ao fazermos uma corrente elétrica atravessar as várias espiras da bobina. (Em Física, esse fenômeno de armazenamento de energia potencial elétrica é conhecido como **indução eletromagnética**, razão do nome *indutor*.)

É possível mostrar que a diferença instantânea de tensão entre os terminais de um indutor é diretamente proporcional à taxa de variação temporal instantânea da corrente que o atravessa. Em símbolos,

$$U(t) = L\frac{di}{dt}, \tag{8}$$

sendo a constante de proporcionalidade L denominada a **indutância** do indutor. Assim, vemos que L é medida em V $\cdot$ s/A $\cancel{= V/C}$, unidade conhecida como **Henry**[4] e abreviada por

[4] Joseph Henry (1797-1878), físico americano.

$H = V \cdot \frac{s}{A} = V \cdot \frac{s}{C/s} = \frac{Vs^2}{C}$

H.

Em um circuito, um **nó** é um ponto ao qual estão ligados dois ou mais elementos. Um **caminho** é uma sequência de elementos ligados entre si, na qual nenhum elemento é incluído mais de uma vez. Um caminho é dito **fechado** se, ao percorrê-lo a partir de um certo ponto e em um sentido pré-fixado, eventualmente voltamos ao ponto de partida.

A *análise de circuitos elétricos* é baseada na aplicação judiciosa da primeira e segunda **leis de Kirchhoff**[5]. A **primeira lei de Kirchhoff**, também conhecida como **lei das correntes** ou **dos nós**, afirma que, *em um nó qualquer de um circuito, a soma das correntes elétricas que entram é igual à soma das correntes que saem*, de forma que um nó não acumula carga.

De maior interesse para nós será a **segunda lei de Kirchhoff**, também conhecida como **lei das malhas**, a qual afirma que, em todo circuito elétrico, *a soma algébrica das diferenças de potencial entre as extremidades dos elementos que compõem um caminho fechado é sempre nula.*

O circuito elétrico ilustrado na figura 1, conhecido como um **circuito R-L**, é composto por: uma fonte de tensão, localizada à esquerda; um resistor de resistência R, localizado na porção inferior do circuito; um indutor de indutância L, localizado na porção superior; elementos lineares (fios), unindo a fonte, o resistor e o indutor, conforme mostrado.

Nesse circuito, uma diferença de potencial $U(t)$ entre os polos da fonte gera uma corrente elétrica de intensidade $i(t)$. O efeito da presença do indutor, por sua vez, é gerar uma diferença de tensão $L\frac{di}{dt}$, resistiva a variações de corrente. Portanto, percorrendo o circuito no sentido anti-horário a partir do nó in-

[5]Gustav Kirchhoff (1824-1887), físico alemão.

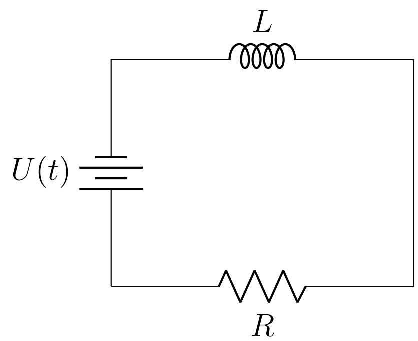

Figura 1: circuito RL.

ferior esquerdo, concluímos, com o auxílio de (7), (8) e da lei das malhas, que

$$U(t) - R\,i(t) - L\frac{di}{dt} = 0.$$

Escrevendo a equação acima como

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}U(t), \tag{9}$$

obtemos uma equação como aquela em (1), com variável t e $y(t) = i(t)$, $p(t) = \frac{R}{L}$, $q(t) = \frac{1}{L}U(t)$.

Por (5), um fator integrante para (9) é

$$h(t) = e^{\int_0^t \frac{R}{L}ds} = e^{\frac{Rt}{L}}.$$

Portanto, segue de (3) que

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{Rt}{L}}i(t)\right) = \frac{1}{L}U(t)e^{\frac{Rt}{L}},$$

de forma que, pelo TFC (e tomando o instante inicial $t_0 = 0$),

$$e^{\frac{Rt}{L}}i(t) - i(0) = \frac{1}{L}\int_0^t U(s)e^{\frac{Rs}{L}}ds.$$

Se $U(t) = \operatorname{sen} t$, então, integrando por partes duas vezes (verifique!), obtemos

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{Rt}{L}} i(t) - i(0) &= \frac{1}{L}\int_0^t e^{\frac{Rs}{L}} \operatorname{sen} s \, ds \\
&= \frac{1}{L} \cdot \frac{e^{\frac{Rs}{L}}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + 1}\left(\frac{R}{L}\operatorname{sen} s - \cos s\right)\Bigg|_0^t,
\end{aligned}
$$

de forma que

$$
i(t) = \left(i(0) + \frac{L}{L^2 + R^2}\right) e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{L}{L^2 + R^2}\left(\frac{R}{L}\operatorname{sen} t - \cos t\right).
$$

Portanto, após algum tempo, a corrente sobre o circuito será essencialmente igual à **corrente estacionária** Para: $\operatorname{sen}(\alpha) = L/\sqrt{R^2+L^2}$

$$
i_e(t) = \frac{L}{L^2 + R^2}\left(\frac{R}{L}\operatorname{sen} t - \cos t\right) = \frac{L}{L^2+R^2} \cdot \frac{\sqrt{L^2+R^2}}{R} \cdot \operatorname{sen}(t-\alpha)
$$

$$
= \frac{L}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+L^2}} \cdot \operatorname{sen}(t-\alpha)
$$

Estudo & Problemas

1. Um corpo de massa m, solto a partir do repouso nas vizinhanças da superfície da Terra, experimenta, na ausência de ventos apreciáveis, um movimento retilíneo de queda sob a ação da força de atração gravitacional exercida pela Terra e da força de resistência do ar. A *lei de forças* da força resistiva exercida pelo ar sobre o corpo afirma que sua magnitude é diretamente proporcional à velocidade escalar do corpo. A esse respeito, faça os seguintes itens:

   (a) Mostre que a força resultante F sobre o corpo é tal que $F = mg - kv$, onde g denota a aceleração da gravidade, v a velocidade do corpo e k a constante de proporcionalidade a que aludimos acima.

(b) Use a segunda lei de Newton para concluir que, sendo $v = v(t)$, temos $v'(t) + \frac{k}{m}v = g$.

(c) Mostre que $h(t) = e^{\frac{kt}{m}}$ é um fator integrante para a equação diferencial do item (b).

(d) Mostre que, partindo do instante inicial $t_0 = 0$, temos

$$v(t) = e^{-\frac{kt}{m}}v(0) + \frac{mg}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}}).$$

(e) Calcule a *velocidade limite* de queda do corpo.

2. A **lei de resfriamento de Newton** afirma que a taxa temporal segundo a qual um corpo troca calor com o ambiente é diretamente proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do ambiente. A esse respeito, faça os seguintes itens:

   (a) Se $y(t)$ denota a temperatura do corpo no instante t, mostre que existe uma constante positiva k tal que $y'(t) = -k(y(t) - T(t))$, onde $T(t)$ denota a temperatura do ambiente no instante t (suposta conhecida) e o sinal $-$ após a igualdade indica que o calor *flui* do corpo mais quente para o mais frio.

   (b) Mostre que $h(t) = e^{kt}$ é um fator integrante para a equação diferencial do item (a).

   (c) Mostre que, medindo temperaturas a partir do instante $t_0 = 0$, temos

$$y(t) = e^{-kt}y(0) + ke^{-kt}\int_0^t e^{ks}T(s)ds.$$

   (d) No caso em que o ambiente é mantido a uma temperatura constante T_0, mostre que $y(t) \to T_0$ quando $t \to +\infty$, o que condiz com nossa experiência.