5. EDOs de Primeira Ordem IV: Curvas Ortogonais e EDOs Homogêneas

Prof. Antonio Caminha*

29 de março de 2022

Suponha que tenhamos um conjunto $\mathcal{C}$ de curvas numa região $\mathcal{R}$ do plano, tal que exatamente uma curva de $\mathcal{C}$ passa por cada ponto de $\mathcal{R}$. Gostaríamos de encontrar outro conjunto de curvas em $\mathcal{R}$, digamos $\mathcal{D}$, tal que exatamente uma curva de $\mathcal{D}$ passa por cada ponto de $\mathcal{R}$ e, adicionalmente, as curvas de $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ que passam por cada ponto P de $\mathcal{R}$ sejam *ortogonais*, no sentido de que suas tangentes em P sejam perpendiculares.

Isso ocorre, por exemplo, quando $\mathcal{R}$ é um mapa e $\mathcal{C}$ é o conjunto das *curvas de nível* do mapa (veja a figura a seguir). Neste caso, as curvas de $\mathcal{D}$ são as *trajetórias de máximo aclive* no mapa, isto é, as curvas tais que um ponto material, movendo-se ao longo das mesmas com velocidade escalar constante, experimenta, num certo intervalo de tempo, a maior variação de altitude possível.

A questão que queremos considerar aqui é como obter as curvas em $\mathcal{D}$, uma vez conhecidas as curvas em $\mathcal{C}$. Faremos isso apenas no caso bem particular em que as curvas em $\mathcal{C}$ sejam

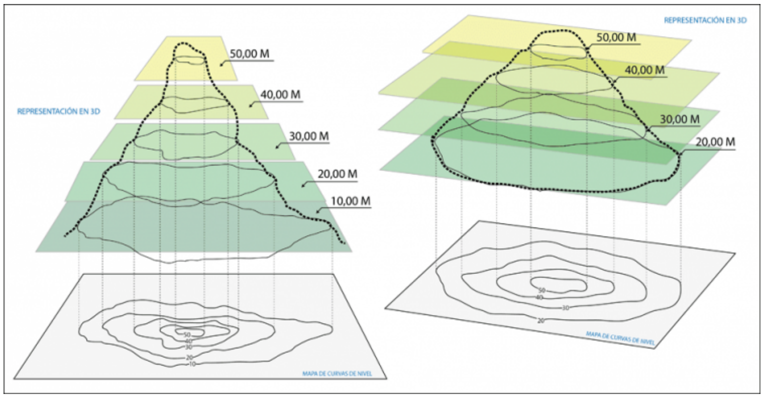

Figura 1: curvas de nível em um mapa.

gráficos de funções, mas ele será suficientemente representativo para ilustrar o que ocorre em geral.

Sejam $\mathcal{R}$ uma região no plano cartesiano e $F : \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e que não se anula. Suponha (acompanhe na próxima figura) que as curvas de $\mathcal{C}$ são gráficos de soluções da EDO

$$y' = F(x, y)$$

(de sorte que $y'(x) = F(x, y(x)) \neq 0$, para todo x no domínio de $y = y(x)$).

Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$, sabemos do Cálculo que a reta r, tangente à curva de $\mathcal{C}$ que passa pelo ponto (x_0, y_0), tem coeficiente angular

$$y'(x_0) = F(x_0, y_0) \neq 0.$$

Portanto, r não é horizontal. Por outro lado, a Geometria Analítica ensina que a reta s, que passa por (x_0, y_0) e é perpendicular a r (não é vertical e) tem coeficiente angular $-\frac{1}{F(x_0,y_0)}$.

Assim, se conseguirmos resolver a EDO

$$y' = -\frac{1}{F(x, y)},$$

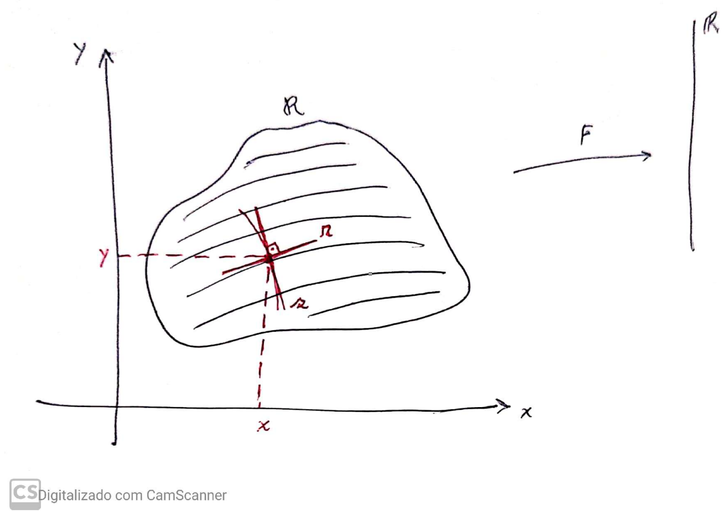

Figura 2: a família de curvas $\mathcal{C}$ em $\mathcal{R}$.

então os gráficos de suas soluções serão as curvas de $\mathcal{D}$. Diremos, nesse caso, que as curvas de $\mathcal{D}$ são as **trajetórias ortogonais** às curvas de $\mathcal{C}$.

Exemplo 1. Sejam dados uma reta t e um ponto $O \in t$. Se $\mathcal{C}$ é a família dos círculos com centros em t e que passam por O, uma trajetória ortogonal a $\mathcal{C}$ é a própria reta t. Escolha um sistema cartesiano de coordenadas no qual O seja a origem e t seja o eixo das ordenadas, e descreva as demais trajetórias ortogonais de $\mathcal{C}$ como soluções de uma EDO de primeira ordem.

Solução. Dado $R > 0$, o círculo Γ de raio R, com centro em t e passando por O é centrado em $(0, R)$ ou $(0, -R)$.

Se o centro de Γ for $(0, R)$, sua equação é

$$(x - 0)^2 + (y - R)^2 = R^2$$

ou, ainda,

$$x^2 + y^2 - 2Ry = 0. \tag{1}$$

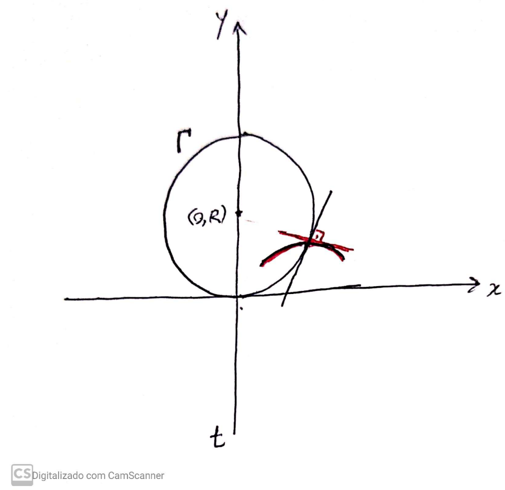

Figura 3: curvas ortogonais a uma família de círculos.

Os semicírculos de Γ situados acima e abaixo de seu diâmetro horizontal definem y como função de x.

Para encontrar uma EDO para as trajetórias ortogonais, precisamos descrever tais semicírculos de Γ como soluções de uma EDO de primeira ordem. Para tanto, derivamos implicitamente (1), obtendo

$$2x + 2yy' - 2Ry' = 0.$$

Assim, exceto pelos pontos mais baixo e mais alto de Γ (nos quais $y' = 0$), temos

$$R = \frac{x + yy'}{y'} = \frac{x}{y'} + y.$$

Substituindo essa expressão para R em (1), obtemos

$$x^2 + y^2 - 2\left(\frac{x}{y'} + y\right)y = 0.$$

Resolvendo a expressão acima para y', chegamos, por fim, a

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Nesse ponto, você pode verificar facilmente que, se tivéssemos tomado o centro de Γ em $(0, -R)$, então, repassando os cálculos acima, chegaríamos à mesma EDO.

Por fim, se estivermos numa região em que $\frac{2xy}{x^2-y^2} \neq 0$, então nossa discussão anterior sobre trajetórias ortogonais garante que as trajetórias ortogonais de $\mathcal{C}$ são os gráficos das soluções da EDO

$$y' = -\left(\frac{2xy}{x^2 - y^2}\right)^{-1} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \tag{2}$$

$\square$

A EDO de primeira ordem (2) não é linear; ela também não é separável, pois a função $(x, y) \mapsto \frac{y^2-x^2}{2xy}$ não pode ser escrita na forma $f(x)g(y)$. Entretanto, ela pertence a uma classe de EDOs de primeira ordem que podem ser transformadas em EDOs separáveis por uma mudança de variável bastante simples.

Definição 2. *Uma EDO $y' = F(x, y)$ é* **homogênea** *se a função F for tal que $F(ax, ay) = F(x, y)$, para todos $a \neq 0$ e x, y tais que (x, y) e (ax, ay) pertençam ao domínio de F.*

Para resolver uma EDO homogênea $y' = F(x, y)$ quando $x \neq 0$, operamos a substituição de variável $y = xu$, $(u = u(x))$. Como

$$y' = u + xu'$$

e

$$F(x, y) = F(x, xu) = F(1, u),$$

essa substituição de variável transforma $y' = F(x,y)$ (para $x \neq 0$) na EDO

$$u + xu' = F(1,u)$$

ou, o que é o mesmo,

$$u' = \frac{F(1,u) - u}{x}. \tag{3}$$

Tal EDO é separável. Realmente, escrevendo $u' = \frac{du}{dx}$, transformamos (3) em

$$\frac{du}{F(1,u) - u} = x\,dx.$$

Na presença de uma EDO homogênea específica, você não deve tentar aplicar diretamente as fórmulas acima, pois é quase certo que erre um sinal ou esqueça algum termo. Uma vez tendo percebido que a EDO é homogênea, a estratégia correta é executar a mudança de variável $y = xu$ e refazer os cálculos acima.

Exemplo 3. Se $F(x,y)$ denota o segundo membro de (2) e $a \neq 0$, então

$$F(ax, ay) = \frac{(ay)^2 - (ax)^2}{2ax \cdot ay} = \frac{\cancel{a^2}(y^2 - x^2)}{2\cancel{a^2}xy} = F(x,y).$$

Portanto, (2) é uma EDO homogênea. Use este fato para concluir o exemplo 1, descrevendo as trajetórias ortogonais à família $\mathcal{C}$ de círculos lá descrita.

Solução. A substituição de variável $y = xu$ dá

$$u + xu' = y' = F(x,y) = F(x,xu) = F(1,u),$$

de sorte que

$$u' = \frac{F(1,u) - u}{x} = \frac{\frac{u^2-1}{2u} - u}{x} = -\frac{u^2+1}{2xu}.$$

Portanto, escrevendo $u' = \frac{du}{dx}$, temos

$$\frac{2udu}{u^2+1} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando ambos os membros acima, obtemos

$$\log(u^2+1) = -\log|x| + c = \log\frac{e^c}{|x|},$$

para alguma constante real c. Escrevendo $C = e^c > 0$, segue que

$$u^2 + 1 = \frac{C}{|x|}$$

ou, ainda (uma vez que $u = \frac{y}{x}$),

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C}{|x|}.$$

Essa última equação pode ser escrita como

$$x^2 + y^2 - C|x| = 0,$$

o que é o mesmo que

$$(x \pm C)^2 + y^2 = C^2.$$

Assim, exceto pela própria reta t, as trajetórias ortogonais de $\mathcal{C}$ são os círculos de centro em $(\pm C, 0)$ e raio C. Em termos geométricos, tais círculos podem ser descritos como aqueles em $\mathcal{C}$, bastando trocar a reta t pela reta s, que passa por O e é perpendicular a t. $\square$

O próximo exemplo mostra que a situação não é tão simples quanto parece.

Exemplo 4. *Encontre a solução geral da EDO* $y' = \frac{y-x}{y+x}$ *para* $x \neq 0$.

Solução. Sendo $F(x,y) = \frac{y-x}{x+y}$, temos

$$F(ax,ay) = \frac{ay-ax}{ay+ax} = \frac{\cancel{a}(y-x)}{\cancel{a}(y+x)} = \frac{y-x}{y+x} = F(x,y).$$

Portanto, $y' = F(x,y)$ é homogênea, e a substituição de variável $y = xu$ dá, para $x \neq 0$,

$$u + xu' = y' = F(x,y) = F(x,xu) = F(1,u).$$

Segue que

$$\frac{du}{dx} = u' = \frac{F(1,u)-u}{x} = \frac{\frac{u-1}{u+1} - u}{x} = -\left(\frac{1+u^2}{1+u}\right)\frac{1}{x}.$$

Então,

$$\left(\frac{1+u}{1+u^2}\right)du = -\frac{dx}{x}$$

ou, ainda,

$$\frac{du}{1+u^2} + \frac{u\,du}{1+u^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrando em ambos os membros, obtemos, para $x \neq 0$,

$$\operatorname{arctg} u + \frac{1}{2}\log(1+u^2) = -\log|x| + C,$$

onde C é uma constante real. Substituindo $u = \frac{y}{x}$, segue que

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = -\log|x| + C$$

e, então,

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \cancel{\frac{1}{2}\log x^2} = -\cancel{\log|x|} + C.$$

Observe que a relação acima entre x e y é o melhor que podemos obter, pois não podemos resolvê-la para y, explicitando y como função de x. Teremos mais a dizer sobre isso na próxima aula. $\square$

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 3 do capítulo 1 e faça os problemas 1, 2 e 3.
2. Leia a seção 7 do capítulo 2 e faça os problemas 1 (três itens à sua escolha), 3 e 6.