

6. EDOs de Primeira Ordem V: Considerações gerais sobre a equação

$$y' = f(x, y)$$

Prof. Antonio Caminha*

31 de março de 2022

Um PVI da forma

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

nem sempre tem solução e, se tiver, pode ter mais de uma solução. Ilustremos essa afirmação por meio de dois exemplos.

Exemplo 1. O PVI

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4(y+1)}) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

não tem solução real, uma vez que $\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 - 4(y+1)}) \notin \mathbb{R}$ quando $x = 0$ e $y = 0$.

Exemplo 2. O PVI

$$\begin{cases} y' = 3y^{2/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

admite as soluções $y(x) = 0$ e $y(x) = x^3$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

Uma dificuldade mais sutil foi vista no último exemplo da aula passada: ainda que $y' = f(x, y)$ tenha soluções, pode não ser possível explicitá-las. De fato, naquele exemplo mostramos que a EDO

$$y' = \frac{y - x}{y + x}$$

é tal que toda solução $y = y(x)$, *se existir*, satisfaz, para $x \neq 0$, a relação

$$\arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = C,$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante. No entanto, conforme já observamos na aula anterior, não temos como, a partir da relação acima, explicitar y em termos de x , nem saber se soluções de fato existem.

Em geral, para garantir a existência e unicidade de soluções para o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

nos valeremos do Teorema 5, conhecido como o **Teorema de Existência e Unicidade de Picard**¹.

Para seu enunciado e demonstração, é útil lembrarmos alguns fatos básicos de Análise, a começar pelo seguinte resultado, conhecido como o **Teorema de Weierstrass**.

Teorema 3 (Weierstrass). *Se $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ é uma região fechada e limitada, e $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então F assume valores máximo e mínimo em $\mathcal{D}$.*

Em outras palavras, nas notações e hipóteses do Teorema de Weierstrass, existem $(x_m, y_m), (x_M, y_M) \in \mathcal{D}$ tais que

$$F(x_m, y_m) \leq F(x, y) \leq F(x_M, y_M), \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}.$$

¹Em homenagem a Émile Picard, matemático francês dos séculos XIX e XX.

Precisamos, ainda dos seguintes preliminares sobre espaços de funções contínuas: dados $a < b$ reais, denotamos por $C[a, b]$ o espaço vetorial das funções $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas (as operações de espaço vetorial são as usuais: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para todas $f, g \in C[a, b]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$).

Pelo teorema de Weierstrass, para toda $f \in C[a, b]$, a função $|f|$ atinge um valor máximo em $[a, b]$ (uma vez que $|f|$ também pertence a $C[a, b]$). Isso garante que a função $\|\cdot\| : C[a, b] \rightarrow [0, +\infty)$, dada por

$$\|f\| = \max\{|f(x)|; x \in [a, b]\},$$

está bem definida.

Tal função é, de fato, uma norma em $C[a, b]$. Realmente, segue prontamente da definição que

$$\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0 \quad \text{e} \quad \|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|.$$

Ademais, se g for outra função em $C[a, b]$, então

$$\begin{aligned} \|f + g\| &= \max\{|(f + g)(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \max\{|f(x)| + |g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \max\{|f(x)|; x \in [a, b]\} + \max\{|g(x)|; x \in [a, b]\} \\ &= \|f\| + \|g\|. \end{aligned}$$

Como ocorre com todo espaço vetorial normado, $C[a, b]$ é um espaço métrico quando munido com a distância $d : C[a, b] \times C[a, b] \rightarrow [0, +\infty)$ dada por

$$d(f, g) = \|f - g\|.$$

Assim, tem sentido considerarmos, em $C[a, b]$, todos os conceitos relativos a espaços métricos, tais como sequências de Cauchy, sequências convergentes, etc.

Nesse sentido, o ingrediente fundamental para a demonstração do Teorema de Picard é o seguinte fato sobre $C[a, b]$.

Teorema 4. *O espaço vetorial normado $(C[a, b], \|f\|)$ é completo, isto é, é tal que toda sequência de Cauchy converge.*

Prova. Se $(f_n)_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $C[a, b]$, queremos mostrar que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge.

Dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k, l > n_0 \Rightarrow \|f_k - f_l\| < \epsilon$. Em particular, fixado arbitrariamente $x_0 \in [a, b]$, temos que

$$\begin{aligned} |f_k(x_0) - f_l(x_0)| &\leq \max\{|f_k(x) - f_l(x)|; x \in [a, b]\} \\ &= \|f_k - f_l\| < \epsilon, \end{aligned}$$

de sorte que $(f_n(x_0))_{n \geq 1}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$.

Como $\mathbb{R}$ é completo, existe $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$, e podemos definir uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_0)$. Além disso, dado $\epsilon > 0$ e tomando n_0 como acima (que só depende de ϵ) e $k, l > n_0$, fazendo $k \rightarrow +\infty$ na desigualdade $|f_k(x_0) - f_l(x_0)| < \epsilon$ obtemos

$$|f(x_0) - f_l(x_0)| \leq \epsilon, \quad \forall l > n_0, \quad \forall x_0 \in [a, b]. \quad (1)$$

A função f é a candidata ao limite da sequência $(f_n)_{n \geq 1}$ em $C[a, b]$. Para tanto, temos de mostrar que $f \in C[a, b]$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(f_n, f) = 0$.

Para ver que $f \in C[a, b]$ (isto é, que f é contínua), seja $\epsilon > 0$ dado e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que (1) valha para todo $l > n_0$ natural e todo $x_0 \in [a, b]$. Então, para $u, u_0 \in [a, b]$, a desigualdade triangular dá

$$\begin{aligned} |f(u) - f(u_0)| &\leq |f(u) - f_l(u)| + |f_l(u) - f_l(u_0)| + |f_l(u_0) - f(u_0)| \\ &\leq 2\epsilon + |f_l(u) - f_l(u_0)|. \end{aligned}$$

Fixe $l > n_0$. Como f_l é contínua em u_0 , existe $\delta > 0$ tal que $u \in [a, b]$, $|u - u_0| < \delta \Rightarrow |f_l(u) - f_l(u_0)| < \epsilon$. Portanto, o argumento acima garante que

$$u \in [a, b], |u - u_0| < \delta \Rightarrow |f(u) - f(u_0)| \leq 2\epsilon + |f_l(u) - f_l(u_0)| < 3\epsilon.$$

Assim, f é contínua em u_0 , e a arbitrariedade de u_0 garante que f é contínua em $[a, b]$.

Agora que sabemos que $f \in C[a, b]$, obtemos, a partir de (1), que, para $l > n_0$, vale

$$\begin{aligned} l > n_0 \Rightarrow d(f_l, f) &= \|f_l - f\| \\ &= \max\{|f_l(x_0) - f(x_0)|; x \in [a, b]\} \\ &\leq \epsilon. \end{aligned}$$

Então, $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ em $C[a, b]$. □

Podemos finalmente enunciar e demonstrar o

Teorema 5 (Picard). *Sejam $\mathcal{R} = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subset \mathbb{R}^2$ e $f : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe e também é contínua em $\mathcal{R}$. Se $|f| \leq M$ e $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| < N$ em $\mathcal{R}$, então o PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (2)$$

tem uma única solução $y : [x_0 - c, x_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}$, com $c = \min\{r, \frac{s}{M}, \frac{1}{N}\}$ e $\text{Graf}(y) \subset \mathcal{R}$.

Prova. Inicialmente, para $0 < c \leq r$, o Teorema Fundamental do Cálculo garante que a função $y : [x_0 - c, x_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz (2) se, e só se,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt. \quad (3)$$

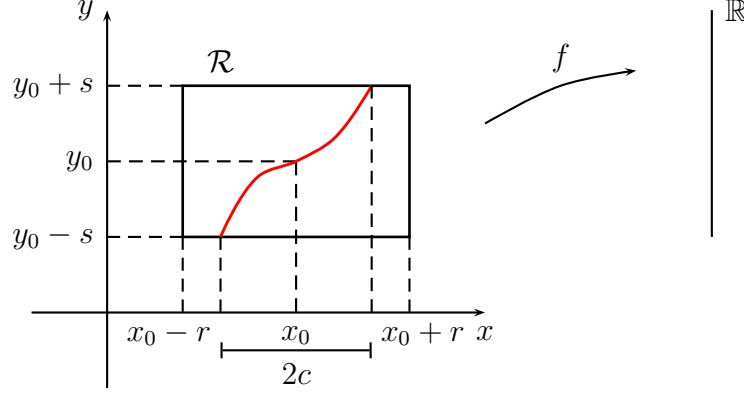


Figura 1: o Teorema de Picard.

A fim de encontrar uma tal função y , começemos com a função constante $y_0(x) := y_0$ e, a partir de uma função contínua $y_n : [x_0 - c, x_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}$ com gráfico contido em $\mathcal{R}$, definamos uma nova função $y_{n+1} : [x_0 - c, x_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt. \quad (4)$$

(A condição $\text{Graf}(y_n) \subset \mathcal{R}$ é necessária, a fim de que a expressão $f(t, y_n(t))$ tenha sentido.)

A continuidade de f garante a existência da integral e a continuidade de y_{n+1} . Por outro lado, a hipótese $\text{Graf}(y_n) \subset \mathcal{R}$, juntamente com o fato de que $c \leq \min \left\{ r, \frac{s}{M} \right\}$, dão $\text{Graf}(y_{n+1}) \subset \mathcal{R}$. Realmente, pela desigualdade triangular para integrais,

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x M dt \right| = M|x - x_0| \leq Mc \leq s, \end{aligned}$$

de sorte que $y_{n+1}(x) \in [y_0 - s, y_0 + s]$.

Agora, o fato de $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq N$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}$ garante, a partir de (4) e com o auxílio do Teorema do Valor Médio (TVM), que, para $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$,

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))| dt \right| \\ &= \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi_n(t)) \right| |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \right|, \end{aligned}$$

para algum real $\xi_n(t)$ pertencente ao intervalo de extremos $y_n(t)$ e $y_{n-1}(t)$. Mas, como $\left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq N$ em $\mathcal{R}$, segue que

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x N |y_n(t) - y_{n-1}(t)| dt \right| \\ &\leq N \|y_n - y_{n-1}\| \left| \int_{x_0}^x dt \right| \\ &\leq N |x - x_0| \|y_n - y_{n-1}\| \\ &\leq Nc \|y_n - y_{n-1}\|, \end{aligned}$$

em que $\|\cdot\|$ é a norma em $C[x_0 - c, x_0 + c]$. Como $c \leq \frac{1}{N}$, temos $0 < Nc < 1$. Fazendo $\lambda = Nc$, segue das estimativas acima que

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &= \max\{|y_{n+1}(x) - y_n(x)|; x \in [x_0 - c, x_0 + c]\} \\ &\leq \lambda \|y_n - y_{n-1}\|. \end{aligned}$$

Então, para $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, essa última estimativa e a desigualdade triangular dão, primeiramente,

$$\begin{aligned} \|y_{n+1} - y_n\| &\leq \lambda \|y_n - y_{n-1}\| \leq \lambda^2 \|y_{n-1} - y_{n-2}\| \leq \dots \\ &\leq \lambda^n \|y_1 - y_0\|; \end{aligned}$$

Se $c = \frac{1}{N}$, precisamos fazer algo mais.

a partir daí,

$$\begin{aligned}\|y_m - y_n\| &= \left\| \sum_{j=n}^{m-1} (y_{j+1} - y_j) \right\| \leq \sum_{j=n}^{m-1} \|y_{j+1} - y_j\| \\ &\leq \sum_{j=n}^{m-1} \lambda^j \|y_1 - y_0\| < \sum_{j \geq n} \lambda^j \|y_1 - y_0\| \\ &= \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|y_1 - y_0\|.\end{aligned}$$

Como $0 < \lambda < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda^n = 0$, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|y_1 - y_0\| < \epsilon$ para $n > n_0$. Então,

$$m > n > n_0 \Rightarrow \|y_m - y_n\| \leq \frac{\lambda^n}{1 - \lambda} \|y_1 - y_0\| < \epsilon,$$

de sorte que a sequência $(y_n)_{n \geq 1}$ é de Cauchy em $C[x_0 - c, x_0 + c]$, logo, convergente, pelo teorema anterior.

Uma vez que convergência em $C[x_0 - c, x_0 + c]$ é, em última análise, convergência uniforme, fazendo $n \rightarrow +\infty$ em (4), nós obtemos

$$\begin{aligned}y(x) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right) \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t, y_n(t)) dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt,\end{aligned}$$

conforme desejado.

A demonstração da unicidade da solução é filosoficamente similar. Começando com duas soluções $y, \tilde{y} : [x_0 - c, x_0 + c] \rightarrow \mathbb{R}$,

utilizamos (3) e o TVM para obter

$$\begin{aligned} |y(x) - \tilde{y}(x)| &= \left| \int_{x_0}^x (f(t, y(t)) - f(t, \tilde{y}(t))) dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi(t)) \right| |y(t) - \tilde{y}(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^x N |y(t) - \tilde{y}(t)| dt \right|, \end{aligned}$$

onde $\xi(t)$ pertence ao intervalo de extremos $y(t)$ e $\tilde{y}(t)$.

A partir daí, sendo

$$C = \max\{|y(x) - \tilde{y}(x)|; x \in [x_0 - c, x_0 + c]\},$$

(C existe graças ao Teorema de Weierstrass) uma fácil indução permite concluir que

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq C \cancel{N} \frac{|x - x_0|^n}{n!}, \quad (5)$$

→ talvez N^n ? ↲

para todos $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, como $|x - x_0| \leq c$, tem-se

$$|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq C N \cdot \frac{c^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por fim, como $\frac{c^n}{n!} \rightarrow 0$ à medida que $n \rightarrow +\infty$, conclui-se que $|y(x) - \tilde{y}(x)| \leq 0$ para todo $x \in [x_0 - c, x_0 + c]$, logo, $y(x) = \tilde{y}(x)$, para todo tal x . $\square$

Exemplo 6. Vejamos o que o Teorema de Picard diz sobre o PVI

$$\begin{cases} y' = \frac{y-x}{y+x} \\ y(1) = 1 \end{cases},$$

tomando $\mathcal{R} = [0, 2] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ como domínio.

Prof. Antonio Caminha

Nesse caso, $f(x, y) = \frac{y-x}{y+x}$ é claramente contínua em $\mathcal{R}$. Da mesma forma,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1(y+x) - (y-x)1}{(y+x)^2} = \frac{2x}{(y+x)^2}$$

é contínua em $\mathcal{R}$. Portanto, f e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são limitadas em $\mathcal{R}$, pelo Teorema de Weierstrass. De fato, pela desigualdade triangular, temos

$$|f(x, y)| = \frac{|y-x|}{|y+x|} \leq \frac{|y|+|x|}{y+x} = \frac{y+x}{y+x} = 1.$$

Também,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| = \frac{2x}{(y+x)^2} \leq \frac{2 \cdot 2}{(1/2)^2} = 16.$$

Tomando $x_0 = 1$, $r = 1$, $y_0 = 1$, $s = \frac{1}{2}$, $M = 1$ e $N = 16$ no Teorema de Picard, obtemos $c = \min \left\{ 1, \frac{1/2}{1}, \frac{1}{16} \right\} = \frac{1}{16}$. Então, o teorema garante que o PVI tem uma única solução $y : [\frac{15}{16}, \frac{17}{16}] \rightarrow \mathbb{R}$, com $\text{Graf}(y) \subset [0, 2] \times [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$.

Note que não temos muita ideia quanto ao formato do gráfico da solução. O que sabemos, e graças aos argumentos da aula anterior, é que $y = y(x)$ satisfaz a relação

$$\arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) = C,$$

com $C = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2$ (tal valor de C é aquele que faz com que $y(1) = 1$).

Suponha, agora, que $f = f(x, y)$ seja uma função definida em uma região $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ (não necessariamente um retângulo)

e satisfazendo, em cada retângulo fechado contido em $\mathcal{D}$, as condições do Teorema de Picard.

Fixado um ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, podemos tomar um retângulo $\mathcal{R}_{(x_0, y_0)} = [x_0 - r, x_0 + r] \times [y_0 - s, y_0 + s] \subset \mathcal{D}$ (acompanhe na próxima figura, na qual mostramos dois desses retângulos).

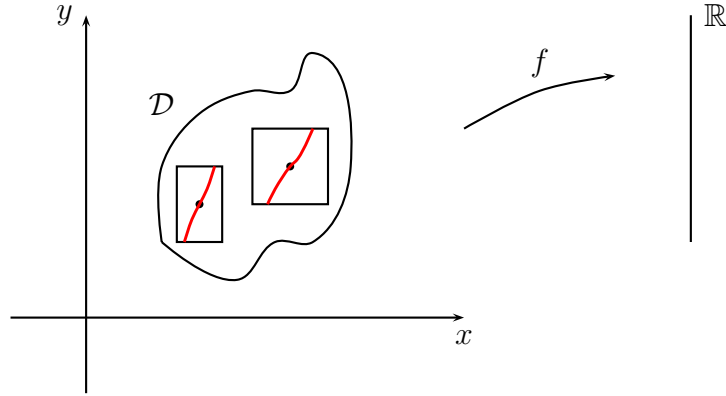


Figura 2: soluções de $y' = f(x, y)$ com condições iniciais distintas.

Aplicando o Teorema de Picard a esse retângulo, obtemos uma solução para o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

definida num intervalo de centro x_0 , com gráfico contido em $\mathcal{R}_{(x_0, y_0)}$ (logo, em $\mathcal{D}$) e passando pelo ponto (x_0, y_0) (uma vez que $y(x_0) = y_0$).

Por outro lado, a parte de unicidade do Teorema de Picard garante que, dado um ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, há uma *única* curva que passa por ele e que é o gráfico de uma solução da EDO $y' = f(x, y)$ tal que $y(x_0) = y_0$.

Nas notações da discussão acima, dizemos que o gráfico de uma solução $y = y(x)$ da EDO $y' = f(x, y)$, parametrizado como a curva $x \mapsto (x, y(x))$, é uma **curva integral** da EDO.

A parte de unicidade do Teorema de Picard garante que a EDO $y' = f(x, y)$ não admite duas curvas integrais passando por um mesmo ponto (x_0, y_0) com velocidades distintas. Realmente, se duas tais curvas existissem, então o PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

teria duas soluções distintas, o que é um absurdo.

Com essa nomenclatura, temos a seguinte

Definição 7. *Sejam dadas uma região $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ e uma função contínua $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ também contínua. O **espaço de fase** da EDO $y' = f(x, y)$ em $\mathcal{D}$, é o conjunto das curvas integrais da EDO contidas em $\mathcal{D}$.*

Exemplo 8. As soluções da EDO $y' = -y$ são as funções $y(x) = Ce^{-x}$, com $C \in \mathbb{R}$. Assim, o espaço de fase da EDO em $\mathcal{D} = \mathbb{R}^2$ é formado pelo eixo das abscissas (a curva-solução correspondente a $C = 0$), juntamente com as curvas integrais $x \mapsto (x, Ce^{-x})$, com $C \in \mathbb{R}^*$.

Ainda que não consigamos explicitar as soluções da EDO $y' = f(x, y)$, um raciocínio geométrico simples nos permite ter uma boa ideia *qualitativa* de seu espaço de fase. Isto se deve ao fato de que, mesmo não conhecendo a solução $y = y(x)$ do PVI

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases},$$

conhecemos a equação de sua tangente no ponto (x_0, y_0) .

Realmente, tal tangente tem coeficiente angular

$$y'(x_0) = f(x_0, y(x_0)) = f(x_0, y_0),$$

logo, equação

$$y - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0). \quad (6)$$

Então, conhecendo o ponto (x_0, y_0) e a função f , conhecemos também a reta acima.

A partir daí, temos a seguinte

Definição 9. *Sejam dadas uma região $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ e uma função contínua $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$, com derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ também contínua. O **campo de direções** em $\mathcal{D}$ associado à EDO $y' = f(x, y)$, é o conjunto das retas do plano definidas pela equação (6), à medida que o ponto (x_0, y_0) varia em $\mathcal{D}$.*

Exemplo 10. Na figura a seguir, esboçamos (para facilitar a compreensão) pequenos segmentos de cada uma das retas que compõem o campo de direções associado à EDO $y' = -\frac{y}{x}$ no domínio $\mathcal{D} = (0, 4) \times (0, 4)$.

Como $f(x, y) = -\frac{y}{x}$, a equação da tangente ao gráfico da solução, relativa à condição inicial $y(x_0) = y_0$, é

$$y - y_0 = -\frac{y_0}{x_0}(x - x_0)$$

ou, ainda,

$$y = 2y_0 - \frac{y_0 x}{x_0}.$$

Fazendo $(x_0, y_0) = (\frac{j}{2}, \frac{k}{2})$, com $1 \leq j, k \leq 7$ inteiros, obtemos a reta

$$y = k - \frac{kx}{j},$$

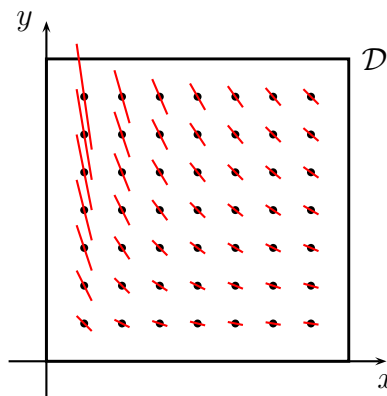


Figura 3: Campo de direções de $y' = -\frac{y}{x}$.

da qual traçamos o segmento correspondente à variação de x ao longo do intervalo $(\frac{j}{2} - \frac{1}{10}, \frac{j}{2} + \frac{1}{10})$.

Note que, mesmo com apenas $7 \cdot 7 = 49$ segmentos, já é possível ter uma ideia razoável do retrato de fase da EDO.

Estudo & Problemas

1. Leia a seção 2 do capítulo 1.
2. Explique porque o Teorema de Picard não se aplica ao Exemplo 2 (e, portanto, porque não há contradição no fato dele ter duas soluções.)
3. Prove (5). (Sug: faça indução sobre n , utilizando a desigualdade para $|y(x) - \tilde{y}(x)|$ deduzida logo antes de (5).)
4. Esboce o retrato de fase da EDO $y' = -y$.

5. Encontre as soluções da EDO $y' = -\frac{y}{x}$, esboce as curvas integrais correspondentes e verifique que o retrato de fase em $\mathcal{D} = (0, 4) \times (0, 4)$ é compatível com o campo de direções esboçado no Exemplo 10.
6. Esboce o campo de direções de $y' = \frac{y-x}{y+x}$ na faixa $(0, 5) \times \mathbb{R}$.