7. EDOs Lineares de Segunda Ordem

Prof. Antonio Caminha*

05 de abril de 2022

A partir desta aula, abandonamos o estudo de equações de primeira ordem e nos concentramos em equações de *segunda* ordem. No entanto, ao invés de estudarmos a equação de segunda ordem mais geral possível, algo como

$$y'' = F(x, y, y'),$$

concentraremos nossa atenção em equações do tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

onde $p, q : I \to \mathbb{R}$ são funções contínuas dadas e $y = y(x)$ é a função incógnita (aqui, como antes, $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo). Conforme veremos, as equações de tipo (1) são suficientemente gerais para aparecerem em várias aplicações interessantes.

Uma observação acerca de (1), simples mas fundamental, é que se $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ são soluções da mesma, então toda função $y : I \to \mathbb{R}$ da forma $y = c_1u_1 + c_2u_2$, com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, também é solução. Realmente, como

$$u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1 = 0 \ \text{ e } \ u_2'' + p(x)u_2' + q(x)u_2 = 0,$$

se $y = c_1u_1 + c_2u_2$, então

$$\begin{aligned}
&y'' + p(x)y' + q(x)y = \\
&\quad = (c_1u_1 + c_2u_2)'' + p(x)(c_1u_1 + c_2u_2)' + q(x)(c_1u_1 + c_2u_2) \\
&\quad = (c_1u_1'' + c_2u_2'') + p(x)(c_1u_1' + c_2u_2') + q(x)(c_1u_1 + c_2u_2) \\
&\quad = c_1(u_1'' + p(x)u_1' + q(x)u_1) + c_2(u_2'' + p(x)u_2' + q(x)u_2) \\
&\quad = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por conta dessa propriedade, dizemos que (1) é uma EDO **linear** de segunda ordem.

Dados $x_0 \in I$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o PVI correspondente a (1) se propõe a encontrar todas as funções de classe C^2 (isto é, duas vezes continuamente deriváveis) $y : I \to \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha,\ y'(x_0) = \beta \end{cases}. \tag{2}$$

A esse respeito, é possível provar o seguinte

Teorema 1 (de existência e unicidade)**.** *Dadas funções contínuas $p, q : I \to \mathbb{R}$ e números reais α e β, o PVI* (2) *admite uma única solução $y : I \to \mathbb{R}$.*

Esse resultado também é devido a Picard, e um ponto importante em relação a ele é que, *devido ao fato da EDO do PVI ser linear*, a solução única está definida em todo o intervalo I, e não em um intervalo menor contendo x_0. Isso é típico das equações lineares.

Ao longo do curso, utilizaremos o teorema anterior várias vezes. Como ocorreu com a versão vista na aula passada para equações de primeira ordem, não apresentaremos sua demonstração em detalhes, mas observamos que ela se reduz ao caso de equações de primeira ordem, ainda que um pouco mais gerais que as vistas até agora.

Mais precisamente, comecemos considerando o *sistema de primeira ordem*

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -p(x) & -q(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix},$$

com a condição inicial

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Se $x \mapsto \begin{pmatrix} z(x) \\ y(x) \end{pmatrix}$ for solução, então

$$z' = -p(x)z - q(x)y \quad \text{e} \quad y' = z,$$

de sorte que

$$y'' = z' = -p(x)z - q(x)y = -p(x)y' - q(x)y,$$

com $y(x_0) = \alpha$ e $y'(x_0) = z(x_0) = \beta$.

Agora, fazendo $Y(x) = \begin{pmatrix} z(x) \\ y(x) \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ e $A(x) = \begin{pmatrix} -p(x) & -q(x) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, queremos garantir a existência e unicidade de $Y : I \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$Y' = A(x)Y, \quad \text{com} \quad Y(x_0) = Y_0.$$

Para tanto, argumentando como na aula anterior, escrevemos

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)Y(t)dt. \tag{3}$$

A ideia de Picard foi começar com a função constante $Y_0(x) := Y_0$ e, a partir de uma função conhecida $Y_n : I \to \mathbb{R}^2$, definir uma nova função $Y_{n+1} : I \to \mathbb{R}^2$, tal que

$$Y_{n+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(t)Y_n(t)dt. \tag{4}$$

Então, Picard mostrou que a *sequência de funções* $Y_n : I \to \mathbb{R}^2$ converge uniformemente para uma função $Y : I \to \mathbb{R}^2$; uma vez feito isso, fazendo $n \to +\infty$ em (4), obtém-se (3).

A demonstração da unicidade de solução é filosoficamente similar. Começando com duas soluções $Y, \tilde{Y} : I \to \mathbb{R}$ e fixado um intervalo $[a, b] \subset I$ contendo x_0, Picard usou (3) para obter, para $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned}
|Y(x) - \tilde{Y}(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} \big(A(t)Y(t) - A(t)\tilde{Y}(t)\big) dt \right| \\
&= \left| \int_{x_0}^{x} A(t)(Y(t) - \tilde{Y}(t)\big) dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} ||A(t)|||Y(t) - \tilde{Y}(t)| dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x} C|Y(t) - \tilde{Y}(t)| dt \right|,
\end{aligned}$$

em que $C = \max\{||A(t)||;\ t \in [a, b]\}$. A partir daí, Picard mostrou que, sendo

$$N = \max\{|Y(x) - \tilde{Y}(x)|;\ x \in [a, b]\},$$

tem-se, em verdade,

$$|Y(x) - \tilde{Y}(x)| \leq CN \cdot \frac{|x - x_0|^n}{n!},$$

para todos $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$. Então, como $|x - x_0| \leq b - a$, tem-se

$$|Y(x) - \tilde{Y}(x)| \leq CN \cdot \frac{(b-a)^n}{n!}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}.$$

Por fim, como $\frac{(b-a)^n}{n!} \to 0$ à medida que $n \to +\infty$, conclui-se que $|Y(x) - \tilde{Y}(x)| \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$, logo, $Y(x) = \tilde{Y}(x)$, para todo tal x. Mas, como $x_0 \in [a, b] \subset I$ foi fixado arbitrariamente, segue que $Y(x) = \tilde{Y}(x)$, para todo $x \in I$.