

## 8. EDOs Lineares de Segunda Ordem e Coeficientes Constantes I

Prof. Antonio Caminha\*

07 de Abril de 2022

Nesta aula, estudaremos

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \quad (1)$$

e o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \\ y(x_0) = \alpha, y'(x_0) = \beta \end{cases} \quad (2)$$

no caso particular em que as funções  $p$  e  $q$  são constantes, utilizando uma abordagem que não faz uso do Teorema de Existência e Unicidade de Picard.

Começemos nos concentrando nas equações do tipo

$$y'' + by = 0,$$

onde  $b$  é um número real dado (nas notações de (1), isso equivale a considerar o caso em que  $p \equiv 0$  e  $q$  é uma função constante).

Denotando por  $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  as funções dadas por:

$$(a) \quad u_1(x) = e^{\sqrt{-b}x} \text{ e } u_2(x) = e^{-\sqrt{-b}x}, \text{ se } b < 0;$$

---

\*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

## Prof. Antonio Caminha

---

(b)  $u_1(x) = 1$  e  $u_2(x) = x$ , se  $b = 0$ ;

(c)  $u_1(x) = \cos(\sqrt{b}x)$  e  $u_2(x) = \text{sen}(\sqrt{b}x)$ , se  $b > 0$ ,

é imediato verificar que, em cada um dos casos acima, temos

$$u_j'' + bu_j = 0,$$

para  $j = 1, 2$ . Por exemplo, se  $b > 0$ , então

$$\begin{aligned} u_1'' + bu_1 &= \frac{d^2}{dx^2} \cos(\sqrt{b}x) + b \cos(\sqrt{b}x) \\ &= \frac{d}{dx} (-\sqrt{b} \text{sen}(\sqrt{b}x)) + b \cos(\sqrt{b}x) \\ &= -\sqrt{b}^2 \cos(\sqrt{b}x) + b \cos(\sqrt{b}x) = 0. \end{aligned}$$

Os dois resultados a seguir garantem que as funções  $u_1$  e  $u_2$  descrevem todas as soluções de  $y'' + by = 0$ .

**Teorema 1** (existência de soluções para o PVI). *Dados números reais  $b$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , é sempre possível escolher números reais  $c_1$  e  $c_2$  tais que a função*

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2 \tag{3}$$

*resolve o PVI*

$$\begin{cases} y'' + by = 0 \\ y(0) = \alpha, y'(0) = \beta \end{cases} \cdot \tag{4}$$

**Prova.** As observações que fizemos acima garantem que toda função do tipo (3) resolve a EDO  $y'' + by = 0$ . Basta, portanto, garantir que, em cada caso, podemos escolher  $c_1$  e  $c_2$  de forma que  $y(0) = \alpha$  e  $y'(0) = \beta$ , isto é,

$$\begin{cases} c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) = \alpha \\ c_1 u_1'(0) + c_2 u_2'(0) = \beta \end{cases} \cdot \tag{5}$$

**Prof. Antonio Caminha**

---

(a) Se  $b < 0$ , temos  $u_1(0) = u_2(0) = 1$ ,  $u_1'(0) = \sqrt{-b}$ ,  $u_2'(0) = -\sqrt{-b}$ . O sistema de equações (5) se reduz a

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = \alpha \\ c_1\sqrt{-b} - c_2\sqrt{-b} = \beta \end{cases} .$$

Escrevendo a segunda equação como  $c_1 - c_2 = \frac{\beta}{\sqrt{-b}}$ , é imediato que o sistema admite uma única solução.

(b) Se  $b = 0$ , temos  $u_1(0) = 1$ ,  $u_2(0) = 0$ ,  $u_1'(0) = 0$ ,  $u_2'(0) = 1$ . O sistema de equações (5) se reduz a

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = \alpha \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 1 = \beta \end{cases} .$$

Obviamente, ele admite uma única solução.

(c) Se  $b > 0$ , temos  $u_1(0) = 1$ ,  $u_2(0) = 0$ ,  $u_1'(0) = 0$ ,  $u_2'(0) = \sqrt{b}$ . O sistema de equações (5) se reduz a

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = \alpha \\ c_1 \cdot 0 + c_2\sqrt{b} = \beta \end{cases} .$$

Uma vez mais, é claro que ele admite uma única solução.  $\square$

Na demonstração do próximo resultado, utilizaremos a *fórmula de Taylor com resto integral*<sup>1</sup>: se  $I \subset \mathbb{R}$  é um intervalo aberto contendo 0 e  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função infinitamente derivável, então, para todo  $x \in I$ , tem-se

$$y(x) = \sum_{j=0}^n \frac{y^{(j)}(0)}{j!} x^j + r_n(x), \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>Para uma demonstração, veja o capítulo 7 de [1] ou, ainda, o problema 1.

com

$$r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n y^{(n+1)}(t) dt. \quad (7)$$

**Teorema 2** (unicidade de soluções para o PVI). *Dados números reais  $b$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , a solução do PVI (4) é única.*

**Prova.** Escolhendo os números reais  $c_1$  e  $c_2$  como na demonstração do teorema anterior, vimos que a função  $y_1 = c_1 u_1 + c_2 u_2$  resolve (4).

Sendo  $y_2$  outra solução desse PVI e pondo  $y = y_1 - y_2$ , já sabemos que  $y'' + by = 0$ , com  $y(0) = y_1(0) - y_2(0) = 0$  e  $y'(0) = y_1'(0) - y_2'(0) = 0$ . Portanto,  $y$  resolve o PVI

$$\begin{cases} y'' + by = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 0 \end{cases}$$

e, para mostrar que  $y_1 = y_2$ , basta mostrarmos que  $y = 0$ .

Como  $y$  é duas vezes derivável e  $y^{(2)} = -by$ , temos que  $y^{(2)}$  é duas vezes derivável e

$$y^{(4)} = (y^{(2)})^{(2)} = (-by)^{(2)} = -by^{(2)} = b^2 y.$$

Então,  $y^{(4)}$  é duas vezes derivável e

$$y^{(6)} = (y^{(4)})^{(2)} = (b^2 y)^{(2)} = b^2 y^{(2)} = -b^3 y.$$

Prosseguindo dessa forma, concluímos que  $y$  é infinitamente derivável e

$$y^{(2m)} = (-b)^m y, \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (8)$$

Por outro lado,  $y(0) = 0$  dá  $y''(0) = -by(0) = 0$ . Também, como  $y'' = -by$  implica  $y''' = -by'$ , temos que  $y'''(0) = -by'(0) = 0$ . Em geral, como  $y'' = -by$  implica (derivando mais  $n - 1$  vezes)  $y^{(n+1)} = -by^{(n-1)}$ , se já tivermos mostrado que  $y(0) = \dots =$

## Prof. Antonio Caminha

---

$y^{(n-1)}(0) = y^{(n)}(0) = 0$ , então  $y^{(n+1)}(0) = -by^{(n-1)}(0) = 0$ . Portanto,  $y^{(k)}(0) = 0$  para todo  $k \geq 0$ .

Agora, segue de (6) e (7) que, para  $n \in \mathbb{N}$ , temos

$$y(x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n y^{(n+1)}(t) dt.$$

Fixe  $A > 0$  e faça  $n = 2m - 1$  na expressão acima, com  $m \in \mathbb{N}$ . Para  $x \in [0, A]$ , a desigualdade triangular para integrais e (8) dão

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \frac{1}{(2m-1)!} \left| \int_0^x (x-t)^{2m-1} y^{(2m)}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{(2m-1)!} \int_0^x (x-t)^{2m-1} |y^{(2m)}(t)| dt \\ &= \frac{1}{(2m-1)!} \int_0^x (x-t)^{2m-1} |b^m y(t)| dt \\ &= \frac{|b|^m}{(2m-1)!} \int_0^x (x-t)^{2m-1} |y(t)| dt \\ &\leq \frac{|b|^m}{(2m-1)!} \cdot \max_{t \in [0, A]} |y(t)| \int_0^x (x-t)^{2m-1} dt. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^x (x-t)^{2m-1} dt = -\frac{(x-t)^{2m}}{2m} \Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{x^{2m}}{2m}$$

e  $x \in [0, A]$ , segue que

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq \frac{|b|^m}{(2m-1)!} \cdot \max_{t \in [0, A]} |y(t)| \cdot \frac{x^{2m}}{2m} \\ &\leq \frac{|b|^m}{(2m-1)!} \cdot \max_{t \in [0, A]} |y(t)| \cdot \frac{A^{2m}}{2m} \\ &= \frac{(\sqrt{|b|}A)^{2m}}{(2m)!} \cdot \max_{t \in [0, A]} |y(t)|. \end{aligned}$$

Em suma, sendo  $C = \max_{t \in [0, A]} |y(t)|$  e  $c = \sqrt{|b|}A$ , mostramos que, para  $x \in [0, A]$ , tem-se

$$|y(x)| \leq C \cdot \frac{c^{2m}}{(2m)!}. \quad (9)$$

Considerando de partida  $x \in [-A, 0]$  e repassando os cálculos que nos fizemos chegar até aqui, concluimos que essa estimativa para  $|y(x)|$  vale para todo  $x \in [-A, A]$ . Portanto, como<sup>2</sup>

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{c^{2m}}{(2m)!} = 0,$$

fazendo  $m \rightarrow +\infty$  em (9) concluimos que

$$|y(x)| \leq C \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{c^{2m}}{(2m)!} = 0.$$

Logo,  $y(x) = 0$  para todo  $x \in [-A, A]$  e, uma vez que  $A > 0$  foi escolhido arbitrariamente, temos  $y(x) = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Os resultados acima, apesar de se referirem a uma EDO de segunda ordem bastante simples, nos permitem analisar problemas interessantes. No exemplo a seguir, os utilizamos para descrever o **movimento harmônico simples**.

**Exemplo 3** (o oscilador harmônico simples). A dureza de uma mola é caracterizada por sua **constante elástica**, isto é, uma constante  $k > 0$  que representa uma medida da resistência da mola a elongações – compressões ou distensões –, quando presa por uma extremidade a uma parede.

No século XVII, o físico inglês Robert Hooke formulou uma lei empírica, hoje conhecida como **Lei de Hooke**, a qual afirma

---

<sup>2</sup>A esse respeito, veja as notas sobre convergência de seqüências e séries ou, ainda o capítulo 10 de [1].

que, se alongarmos a extremidade solta da mola de um comprimento  $x$  que não induza deformações permanentes na mesma, ela exercerá sobre nossa mão uma **força restauradora** (i.e., que atua no sentido contrário à elongação imposta) de magnitude  $kx$ . Convencionamos, pois, escrever  $F = -kx$  para denotar tal força, tendo o sinal  $-$  o papel de codificar matematicamente seu caráter restaurador. Uma mola que obedeça a Lei de Hooke é conhecida como uma **mola ideal**.

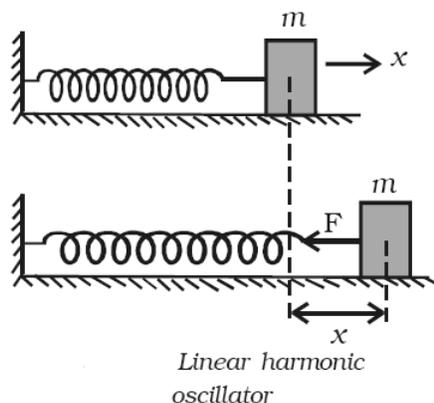


Figura 1: o sistema massa-mola unidimensional.

Prendemos um bloco de massa  $m$  a uma das extremidades de uma mola ideal, mola esta que supomos ter massa desprezível em relação a  $m$ . Em seguida, prendemos a outra extremidade da mola a uma parede, de forma tal que o sistema massa-mola resultante repouse horizontalmente numa superfície plana, a qual suporemos tão polida que nos permita negligenciar, na análise de eventuais movimentos, quaisquer efeitos resultantes de atrito estático ou cinético. Elongamos lentamente a mola de um comprimento  $x_0$  (puxando ou empurrando o bloco de massa  $m$ , conforme o caso) e, por fim, imprimimos ao bloco uma velocidade

## Prof. Antonio Caminha

---

instantânea  $v_0$ , na mesma direção da elongação, deixando o sistema massa-mola oscilar livremente. Descreva o movimento subsequente do bloco.

**Solução.** Uma vez que a velocidade instantânea impressa à mola tem direção igual à da elongação, o movimento oscilatório se dá ao longo de uma reta. Denotemos por  $t$  o tempo transcorrido a partir do instante inicial  $t_0 = 0$  e por  $x(t)$  a elongação da mola no instante  $t$ .

Sabemos que a velocidade  $v(t)$  e a aceleração  $a(t)$  do bloco no instante  $t$  são dadas por  $v(t) = x'(t)$  e  $a(t) = x''(t)$ , respectivamente. As forças que atuam sobre o bloco são: a força restauradora dada pela Lei de Hooke, a força-peso e a reação normal do piso sobre o bloco. Como estas últimas duas se anulam, a Segunda Lei de Newton nos dá a EDO  $mx''(t) = -kx(t)$  ou, ainda,

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0, \quad (10)$$

com  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = v(0) = v_0$ .

Fazendo  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , os teoremas (1) e (2) garantem que a solução geral de (10) é

$$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (11)$$

A fim de entender melhor a natureza do movimento do bloco, comecemos escrevendo o segundo membro de(11) como

$$\sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) \right).$$

Em seguida, observando que

$$\left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1,$$

podemos tomar um arco  $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ , denominado a **fase inicial** do movimento, tal que

$$\text{sen } \varphi_0 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \varphi_0 = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Então, um pouco de Trigonometria dá

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t) + B \text{sen}(\omega t) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} (\text{sen } \varphi_0 \cos(\omega t) + \cos \varphi_0 \text{sen}(\omega t)) \quad (12) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \text{sen}(\omega t + \varphi_0). \end{aligned}$$

As condições iniciais  $x(0) = x_0$  e  $x'(0) = v(0) = v_0$  dão, a partir de (11),  $A = x_0$  e  $B\omega = v_0$ . Portanto, (12) fornece

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \text{sen}(\omega t + \varphi_0), \quad (13)$$

com  $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$  escolhido de tal modo que

$$\text{sen } \varphi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \quad \text{e} \quad \text{cos } \varphi_0 = \frac{v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}.$$

A expressão (13) garante que o movimento do sistema massa-mola é **periódico**, de **período** (i.e., o menor intervalo de tempo necessário para uma oscilação completa)  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Por sua vez, denotando por  $\nu$  a **frequência** do sistema massa-mola, isto é, o número de oscilações completas por unidade de tempo, temos  $\frac{T}{1} = \frac{1}{\nu}$ , de sorte que

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (14)$$

No sistema MKS, frequências são medidas em *Hertz*<sup>3</sup> (abreviado Hz), onde 1 Hz = 1 ciclo/s. Por conta de (14), dizemos

---

<sup>3</sup>Em homenagem a Heinrich Hertz, físico alemão do século XIX.

que  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  é a **frequência natural** do sistema massa-mola unidimensional.

Por fim, (13) garante que a **amplitude**  $\mathcal{A}$  (isto é, a elongação máxima da mola) das oscilações do sistema massa-mola unidimensional em questão é dada por

$$\mathcal{A} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

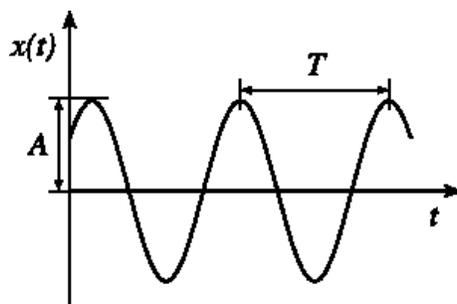


Figura 2: gráfico de  $t \mapsto x(t)$ .

□

### Estudo & Problemas

1. O objetivo deste problema é demonstrar a fórmula de Taylor com resto integral. Para tanto, faça os seguintes itens:
  - (a) Escreva (6) quando  $n = 0$  e conclua que, nesse caso, ela se reduz ao TFC.
  - (b) Se  $n = 1$ , conclua que (6) é

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \int_0^x (x-t)y''(t)dt.$$

Em seguida, calcule a integral do segundo membro por partes para mostrar que esse é, de fato, o caso.

- (c) Para estabelecer a versão geral de (6), faça uma indução da seguinte forma: admita a fórmula vale quando  $n = k - 1$ . Em seguida, integre (7) (com  $n = k$ ) por partes e use a hipótese de indução.
2. Leia a seção 14 do livro-texto e faça os problemas 1, 2 e 3.
3. Sejam  $(a, b)$  um ponto dado no plano e  $k, m$  números reais também dados, com  $k \neq 0$ . Prove que a EDO  $y'' + k^2y = 0$  tem exatamente uma solução cujo gráfico passa por  $(a, b)$  e tem reta tangente nesse ponto com coeficiente angular  $m$ .
4. Sejam  $(a_1, b_1)$  e  $(a_2, b_2)$  pontos do plano tais que  $a_1 - a_2 \neq n\pi$ , para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .
- (a) Prove que a EDO  $y'' + y = 0$  tem exatamente uma solução cujo gráfico passa por esses dois pontos.
- (b) O item (a) continua verdadeiro se  $a_1 - a_2$  for um múltiplo inteiro de  $\pi$ ?
- (c) Generalize o resultado do item (a) para a EDO  $y'' + k^2y = 0$ , onde  $k \neq 0$  é um real dado.

## Referências

- [1] T. Apostol. *Calculus, Volume 1*, segunda edição. John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1967.