

9. EDOs Lineares de Segunda Ordem e Coeficientes Constantes II

Prof. Antonio Caminha*

12 de abril de 2022

Recorde da aula anterior que, para $b \in \mathbb{R}$, denotamos por $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ as funções dadas por:

(a) $u_1(x) = e^{\sqrt{-b}x}$ e $u_2(x) = e^{-\sqrt{-b}x}$, se $b < 0$;

(b) $u_1(x) = 1$ e $u_2(x) = x$, se $b = 0$;

(c) $u_1(x) = \cos(\sqrt{b}x)$ e $u_2(x) = \sin(\sqrt{b}x)$, se $b > 0$.

Recorde também que a solução geral da EDO linear de segunda ordem

$$y'' + by = 0$$

é o conjunto das funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$y = c_1 u_1 + c_2 u_2.$$

Voltemo-nos, agora, ao estudo das EDOs lineares de segunda ordem da forma

$$y'' + ay' + by = 0, \tag{1}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

*Copyright ©2020–2022 Prof. Dr. Antonio Caminha M. Neto. Permissão dada para uso individual.

Sendo $y = uv$, com $u, v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções duas vezes continuamente deriváveis (aqui, em princípio y não necessariamente é solução de (1)), então

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by &= (uv)'' + a(uv)' + buv \\ &= (u''v + 2u'v' + uv'') + a(u'v + uv') + buv \\ &= u''v + u'(2v' + av) + u(v'' + av' + bv). \end{aligned}$$

Se v é uma função tal que $v' + \frac{a}{2}v = 0$, digamos $v(x) = e^{-ax/2}$, então $v' = -\frac{a}{2}v$ e $v'' = -\frac{a}{2}v' = \frac{a^2}{4}v$, de sorte que

$$v'' + av' + bv = \frac{a^2}{4}v - \frac{a^2}{2}v + bv = -\frac{\Delta}{4}v,$$

onde $\Delta = a^2 - 4b$. Também, como $2v' + av = 0$, temos

$$y'' + ay' + by = u''v - \frac{\Delta}{4}uv = \left(u'' - \frac{\Delta}{4}u\right)e^{-ax/2}.$$

Resumimos a discussão acima no seguinte

Lema 1. *Se $y = e^{-ax/2}u$ e $\Delta = a^2 - 4b$, então*

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow u'' - \frac{\Delta}{4}u = 0.$$

Prova. Como $e^{-ax/2}$ nunca se anula, os cálculos acima garantem que

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = 0 &\Leftrightarrow \left(u'' - \frac{\Delta}{4}u\right)e^{-ax/2} = 0 \\ &\Leftrightarrow u'' - \frac{\Delta}{4}u = 0. \end{aligned}$$

□

O resultado a seguir usa a discussão acima para resolver (1).

Teorema 2. *As soluções de $y'' + ay' + by = 0$ são as funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma*

$$y = (c_1 u_1 + c_2 u_2) e^{-ax/2}, \quad (2)$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e, sendo $\Delta = a^2 - 4b$:

(a) $u_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right)$, $u_2(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right)$, se $\Delta < 0$;

(b) $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$, se $\Delta = 0$;

(c) $u_1(x) = e^{\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}$, $u_2(x) = e^{-\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}$, se $\Delta > 0$.

Prova. Pelo lema anterior, sendo $y = e^{-ax/2}u$, temos

$$y'' + ay' + by = 0 \Leftrightarrow u'' - \frac{\Delta}{4}u = 0.$$

Agora, os teoremas 1 e 2 da aula anterior garantem que as soluções de $u'' - \frac{\Delta}{4}u = 0$ são as funções $u = c_1 u_1 + c_2 u_2$, com $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas como no enunciado. Portanto, as soluções de $y'' + ay' + by = 0$ são as funções

$$y = e^{-ax/2}u = (c_1 u_1 + c_2 u_2) e^{-ax/2}.$$

□

Uma maneira alternativa interessante de descrevermos as soluções de $y'' + ay' + by = 0$ depende de sabermos calcular *exponenciais complexas*. Para tanto, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e sendo $z = \alpha + i\beta$, definimos o número complexo e^z por

$$e^z := e^\alpha \operatorname{cis} \beta = e^\alpha (\cos \beta + i \operatorname{sen} \beta),$$

onde e^α denota a exponencial real usual. (Aqui, *cis* é uma abreviação para *coseno mais i seno*.)

Essa noção de exponenciação complexa goza de propriedades análogas às daquelas da exponenciação real, quais sejam:

(i) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$

(ii) $e^z \neq 0; e^{\bar{z}} = \overline{e^z}, \forall z \in \mathbb{C}.$

(iii) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ e $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \forall x \in \mathbb{R}.$

De fato, para $z_j = \alpha_j + i\beta_j$, temos $z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$ e, daí,

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{\alpha_1}(\cos \beta_1 + i \sin \beta_1)e^{\alpha_2}(\cos \beta_2 + i \sin \beta_2) \\ &= e^{\alpha_1+\alpha_2}((\cos \beta_1 \cos \beta_2 - \sin \beta_1 \sin \beta_2) + \\ &\quad + i(\cos \beta_1 \sin \beta_2 + \sin \beta_1 \cos \beta_2)) \\ &= e^{\alpha_1+\alpha_2}(\cos(\beta_1 + \beta_2) + i \sin(\beta_1 + \beta_2)) \\ &= e^{z_1+z_2}, \end{aligned}$$

o que estabelece o item (i).

Para (ii), note inicialmente que, sendo $z = \alpha + i\beta$, temos

$$|e^z| = |e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)| = e^{\alpha} \neq 0.$$

Em particular, $e^z \neq 0$. Por outro lado, $\bar{z} = \alpha - i\beta$ e, como as funções $\cos$ e $\sin$ são par e ímpar, respectivamente, temos

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^{\alpha}(\cos \beta + i \sin \beta)} = e^{\alpha}(\cos \beta - i \sin \beta) \\ &= e^{\alpha}(\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)) = e^{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Quanto a (iii), fazendo $z = ix$ (isto é, tomando $\alpha = 0$ e $\beta = x$), temos

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{e} \quad e^{-ix} = \overline{e^{ix}} = \overline{\cos x + i \sin x} = \cos x - i \sin x.$$

Assim,

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \quad \text{e} \quad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x,$$

de sorte que, somando e subtraindo membro a membro tais relações, obtemos as fórmulas do enunciado.

Mudando um pouco de notação, dados $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$, podemos considerar $e^{\alpha x}$ como uma função

$$\begin{aligned}\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto e^{\alpha x}.\end{aligned}$$

Definimos a *derivada* dessa função como no caso real, impondo que *limites não enxerguem o número i* . Mais precisamente, temos

$$\frac{d}{dx}e^{\alpha x} := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha(x+h)} - e^{\alpha x}}{h},$$

Lema 3. Para $\alpha \in \mathbb{C}$, temos $\frac{d}{dx}e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$.

Prova. Inicialmente, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{\alpha x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x}e^{\alpha h} - e^{\alpha x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x}(e^{\alpha h} - 1)}{h} \\ &= e^{\alpha x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h}.\end{aligned}$$

Agora, sendo $\alpha = u + iv$, com $u, v \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}\frac{e^{\alpha h} - 1}{h} &= \frac{e^{(u+iv)h} - 1}{h} = \frac{e^{uh}(\cos(vh) + i \sin(vh)) - 1}{h} \\ &= \frac{e^{uh}\cos(vh) - 1}{h} + i \frac{e^{uh}\sin(vh)}{h}.\end{aligned}$$

Portanto, pela regra de L'Hôpital, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^{\alpha x} &= e^{\alpha x} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha h} - 1}{h} \\ &= e^{\alpha x} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{uh}\cos(vh) - 1}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{uh}\sin(vh)}{h} \right) \\ &= e^{\alpha x}(u + iv) = \alpha e^{\alpha x}.\end{aligned}$$

□

De posse dos preliminares acima, definimos a **equação característica** de $y'' + ay' + by = 0$ como a equação de segundo grau $x^2 + ax + b = 0$. Note que seu discriminante é $\Delta = a^2 - 4b$ (por isso usamos essa notação antes) e que suas raízes, mesmo no caso $\Delta < 0$, são os números (possivelmente complexos não reais)

$$\frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}.$$

(No caso $\Delta < 0$, o número $\sqrt{\Delta}$ na fórmula acima representa uma das duas raízes complexas de Δ ; a outra é exatamente $-\sqrt{\Delta}$.)

Podemos finalmente enunciar e provar a seguinte versão do teorema anterior, a qual talvez você ache mais fácil de recordar.

Teorema 4. *Sejam dados $a, b \in \mathbb{R}$. Em relação à EDO $y'' + ay' + by = 0$, se a equação característica correspondente tem raízes (possivelmente complexas) distintas α_1 e α_2 , então as soluções são as funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por*

$$y = \tilde{c}_1 e^{\alpha_1 x} + \tilde{c}_2 e^{\alpha_2 x},$$

onde $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \in \mathbb{C}$ são calculados a partir de $y(0)$ e $y'(0)$.

Prova. Pelo teorema 2, as soluções de $y'' + ay' + by = 0$ são as funções $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ da forma

$$y = e^{-ax/2}(c_1 u_1 + c_2 u_2),$$

com $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e:

(i) $u_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right)$, $u_2(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right)$, se $\Delta < 0$;

(ii) $u_1(x) = e^{\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}$, $u_2(x) = e^{-\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}}$, se $\Delta > 0$.

Sejam, agora, $\alpha_1 = \frac{-a+\sqrt{\Delta}}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{-a-\sqrt{\Delta}}{2}$, e consideremos separadamente os casos $\Delta < 0$ e $\Delta > 0$.

(i) $\Delta < 0$: nesse caso, as raízes da equação característica são

$$\alpha_1 = \frac{-a + i\sqrt{-\Delta}}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{-a - i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Portanto, segue da descrição acima que

$$\begin{aligned} y &= e^{-ax/2}(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= e^{\frac{-ax}{2}} \left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}x}{2}\right) \right) \\ &= e^{\frac{-ax}{2}} \left(\frac{c_1}{2} (e^{\frac{i\sqrt{-\Delta}x}{2}} + e^{\frac{-i\sqrt{-\Delta}x}{2}}) + \frac{c_2}{2i} (e^{\frac{i\sqrt{-\Delta}x}{2}} - e^{\frac{-i\sqrt{-\Delta}x}{2}}) \right) \\ &= \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_2}{2i} \right) e^{\frac{-ax+i\sqrt{-\Delta}x}{2}} + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{2i} \right) e^{\frac{-ax-i\sqrt{-\Delta}x}{2}} \\ &= \tilde{c}_1 e^{\alpha_1 x} + \tilde{c}_2 e^{\alpha_2 x}. \end{aligned}$$

(ii) $\Delta > 0$: nesse caso, temos

$$\begin{aligned} y &= e^{-ax/2}(c_1 u_1 + c_2 u_2) \\ &= e^{\frac{-ax}{2}} \left(c_1 e^{\frac{\sqrt{\Delta}x}{2}} + c_2 e^{\frac{-\sqrt{\Delta}x}{2}} \right) \\ &= c_1 e^{\frac{-ax+\sqrt{\Delta}x}{2}} + c_2 e^{\frac{-ax-\sqrt{\Delta}x}{2}} \\ &= c_1 e^{\alpha_1 x} + c_2 e^{\alpha_2 x}. \end{aligned}$$

□

Exemplo 5. Resolva o PVI

$$\begin{cases} y'' + 6y' + 13y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \end{cases}.$$

Solução. A eq. caract. é $x^2 + 6x + 13 = 0$, cujas raízes são

$$\alpha_1 = -3 + 2i \quad \text{e} \quad \alpha_2 = -3 - 2i.$$

A solução geral da EDO é

$$y = \tilde{c}_1 e^{\alpha_1 x} + \tilde{c}_2 e^{\alpha_2 x} = \tilde{c}_1 e^{(-3+2i)x} + \tilde{c}_2 e^{(-3-2i)x}.$$

Portanto,

$$y(0) = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 \quad \text{e} \quad y'(0) = \tilde{c}_1(-3 + 2i) + \tilde{c}_2(-3 - 2i),$$

de sorte que

$$\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 1 \quad \text{e} \quad \tilde{c}_1(-3 + 2i) + \tilde{c}_2(-3 - 2i) = 2.$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$-3 + 2i(\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2) = 2,$$

logo,

$$\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = \frac{-5i}{2}.$$

Então,

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5i}{2} \right) \quad \text{e} \quad \tilde{c}_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5i}{2} \right),$$

de maneira que

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{5i}{2}\right) e^{(-3+2i)x} + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{5i}{2}\right) e^{(-3-2i)x} \\ &= \frac{e^{-3x}}{4} \left((2-5i)e^{2ix} + (2+5i)e^{-2ix}\right) \\ &= \frac{e^{-3x}}{4} \left((2-5i)e^{2ix} + \overline{(2-5i)e^{2ix}}\right) \\ &= \frac{e^{-3x}}{4} \cdot 2\operatorname{Re}((2-5i)e^{2ix}) \\ &= \frac{e^{-3x}}{2} \operatorname{Re}((2-5i)(\cos(2x) + i\sin(2x))) \\ &= \frac{e^{-3x}}{2} (2\cos(2x) + 5\sin(2x)). \end{aligned}$$

□

Exemplo 6 (o oscilador amortecido). Considere novamente uma mola ideal, de constante elástica $k > 0$ e massa desprezível, presa a uma parede por uma extremidade e a um bloco de massa m pela outra. Admita que o bloco oscila ao longo da direção (horizontal) definida pela mola e que, além da força elástica, atua sobre ele (também nessa direção), uma força de amortecimento cuja intensidade é proporcional à velocidade do bloco. Descreva a evolução temporal da oscilação.

Solução. Como na aula anterior, seja $x = x(t)$ a elongação da mola no instante t . Nesse caso, a resultante das forças que atuam sobre o bloco no instante t é $-kx - cv$, onde $c > 0$ é a constante de proporcionalidade da força de amortecimento e $v = x'$ é a velocidade do bloco. A Segunda Lei de Newton nos dá a EDO $mx'' = -kx - cx'$ ou, ainda,

$$x'' + \frac{c}{m}x' + \frac{k}{m}x = 0.$$

Nesse caso, temos

$$\Delta = \frac{c^2 - 4km}{m^2},$$

e os casos $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ e $\Delta > 0$ recebem nomes específicos:

(i) $\Delta < 0$: de acordo com o teorema 2, temos

$$x(t) = \left(A \cos \left(\frac{\sqrt{-\Delta} t}{2} \right) + B \sin \left(\frac{\sqrt{-\Delta} t}{2} \right) \right) e^{-\frac{c}{2m}t},$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$, onde a expressão entre parênteses é similar à elongação na oscilação sem amortecimento (nesse ponto, revise o exemplo 3 da aula anterior, se achar necessário). Portanto, temos

$$x(t) = \mathcal{A} \sin(\omega t + \varphi_0) e^{-\frac{c}{2m}t},$$

onde $\mathcal{A} = \sqrt{A^2 + B^2}$, $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}}$ e φ_0 é um real apropriado.

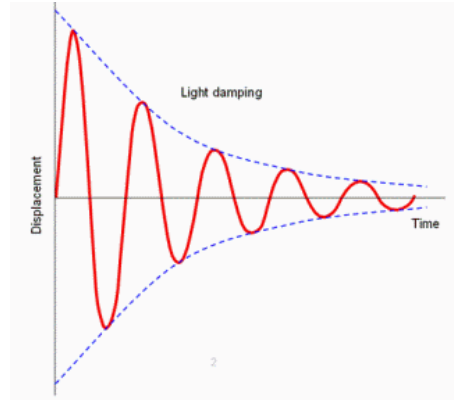


Figura 1: gráfico típico de $t \mapsto x(t)$ no caso subcrítico.

O fator $e^{-\frac{c}{2m}t}$ faz com que o gráfico de $t \mapsto x(t)$ tenha um formato como o esboçado na figura acima, e o amortecimento

(em Inglês, *damping*) é **subcrítico** (em Inglês, *underdamped*).

(ii) $\Delta = 0$: novamente pelo teorema 2, temos

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{c}{2m}t},$$

para certos $A, B \in \mathbb{R}$. Nesse caso, o amortecimento é dito **crítico** (em Inglês, *critically damped*).

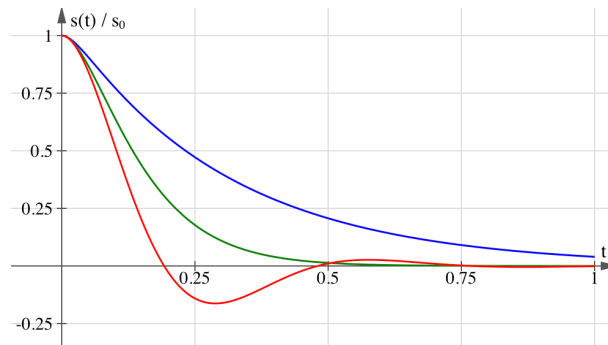


Figura 2: gráficos típicos de $t \mapsto x(t)$ nos casos crítico (em vermelho) e supercrítico (em azul e verde).

(iii) $\Delta > 0$: uma vez mais pelo teorema anterior, temos

$$x(t) = Ae^{\alpha_1 t} + Be^{\alpha_2 t},$$

para certos $A, B, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, com

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{c}{m} \text{ e } \alpha_1 \alpha_2 = \frac{k}{m}.$$

Portanto, $\alpha_1, \alpha_2 < 0$. Nesse caso, o amortecimento é dito **supercrítico** (em Inglês, *overdamped*).

Note que, em todos os casos acima, temos que $x(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$, o que concorda com a intuição física de uma oscilação com amortecimento. $\square$

Estudo & Problemas

1. Leia as seções 16, 17 e 20 do livro-texto. A seção 20 também servirá para a próxima aula, então pode ser lida com mais calma.
2. Nas seções 17 e 20, faça os exercícios 2.